Informatique 3A MFIappro — Automne 2019

Corrigé de l'examen du 13 Novembre 2019

Correction de l'exercice 1.
On notera $\mathcal{C}$ le graphe de f.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2 \geq 1$ et donc $f(x)$ existe et $f(x) \geq 0$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. Puisque la fonction $x \mapsto \cosh x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. f est paire et donc f' est impaire. Par suite, $f'(0) = 0$ et $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0, f(0)) = (0, 0)$.
Etude en $+\infty$.
Pour $x \geq 0$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0 et donc, $\ln(1 + e^{-2x})$ tend vers 0. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x - \ln 2)) = 0$ et la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Par symétrie par rapport à la droite (Oy), la droite (D') d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Enfin, pour tout réel x,

$$f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$

et $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. De même, $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\mathcal{C}$.

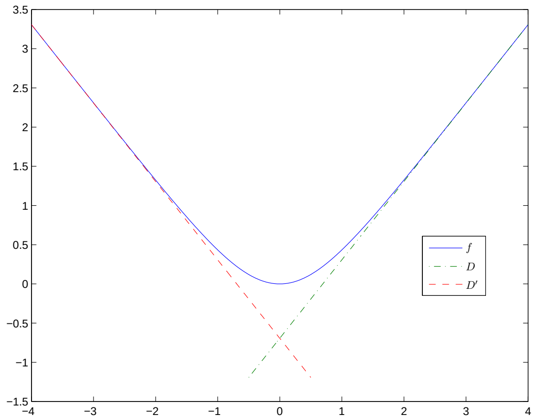

FIGURE 1. Le graphe de la fontion f.

Voir la figure 1.

Correction de l'exercice 2.

(1) On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = -2\,x^4 + 2\,x^2 + o\left(x^4\right).$$

(2) On trouve

$$f(x) = -1/2\,x^2 + x + o\left(x^2\right).$$

Correction de l'exercice 3.
La formule démontrée et d'autres mesures de la rotondité de la terre se trouvent sur
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure_terrestre`
On pourra aussi consulter les url suivantes, sur des problèmes analogues :
`https://www.astuces-pratiques.fr/high-tech/une-preuve-etonnante-de-la-rotondite-de-la-terre`
`http://www.rts.ch/decouverte/sciences-et-environnement/maths-physique-chimie/probleme-du-mois/6709742-la-traversee-du-lac-leman-en-ligne-droite.html`

Remarque 1. Démontrons la formule donnée dans l'énoncé.

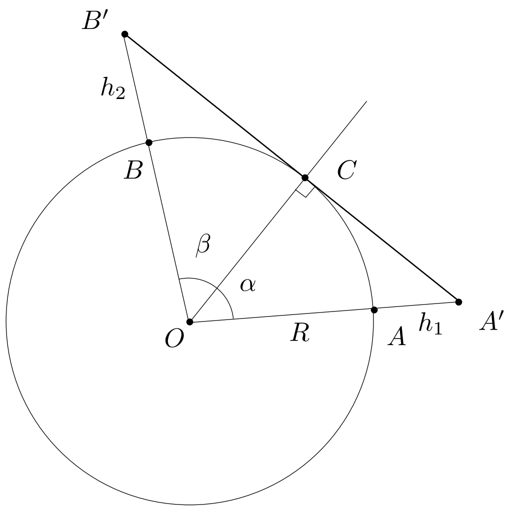

FIGURE 2. La terre, le points d'observation A et le point observé B.

Deux points A (Évian) et B (Lausane) se trouvent à la distance d (sur la sphère). On se trouve à la distance h_1 au dessus de l'eau. Voir figure (2). Notons que la distance l correspondant à la distance entre A et C (sur la sphère) est la distance à laquelle se trouve l'horizon observable.
Dans le triangle rectangle OCA', on a la relation

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h_1}, \tag{1}$$

et puisque le nombre $R/(R+h_1)$ est dans $]0,1[$ et α dans $]0,\pi/2[$, on a

$$\alpha = \arccos\frac{R}{R+h_1}. \tag{2}$$

Par définition de l, on a

$$l = R\alpha. \tag{3}$$

De (2) et (3), on déduit donc

$$l = R\arccos\frac{R}{R+h_1}. \tag{4}$$

Cette formule fournit la distance à laquelle se trouve l'horizon observable.

Avec les données de l'énoncé on obtient

$$l = 7.9863 \text{ km}. \tag{5}$$

Cette distance est bien inférieure à la distance d de l'énoncé et la suite du raisonnement est donc valide.
De l'autre coté de l'horizon, on obtient des formules analogues. (1) devient

$$\cos\beta = \frac{R}{R+h_2}, \tag{6}$$

et donc

$$R + h_2 = \frac{R}{\cos\beta},$$

et donc

$$h_2 = R\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right), \tag{7}$$

qui est positif. On a aussi, en notant L, la distance sur la sphère entre C et B :

$$l + L = d,$$

D'après la valeur de l, donnée par (5), dont on a remarqué qu'elle est inférieure à d, on a bien $L \geq 0$. On a aussi

$$L = R\beta.$$

En utilisant (4), on a

$$\beta = \frac{L}{R} = \frac{d-l}{R} = \frac{d}{R} - \arccos\frac{R}{R+h_1}.$$

Ainsi, grâce à (7), on obtient finalement

$$h_2 = R\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R} - \arccos\frac{R}{R+h_1}\right)} - 1\right), \tag{8}$$

Avec les données de l'énoncé on obtient

$$h_2 = 1.5971 \text{ m}. \tag{9}$$

Cet effet s'observe réellement au bord du lac : on ne voit pas le bas de la digue en face ! C'est plus dur à observer sur la photo de l'énoncé.

(1) (a) (i) La fonction cos définit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ et la fonction réciproque est arccos, définie de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$. Cependant, la dérivée de cette fonction, donnée par

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

n'est pas définie en $y = 1$. On ne peut donc écrire de développement limité de arccos en $y = 1$.

(ii) Cependant, on peut former un développement assymptotique de la façon suivante. On écrit

$$\forall y \in [0,1], \quad \forall x \in [0,\pi/2], \quad (x = \arccos y \Longleftrightarrow y = \cos(x)). \tag{10}$$

On peut écrire le développement limité usuel de cos au voisinage de $x = 0$ sous la forme

$$\forall x \in [0,\pi/2], \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right). \tag{11}$$

On écrit aussi

$$\forall y \in [0,1], \quad y = 1 - u, \text{ où } u \in [0,1], \tag{12}$$

et

$$y \to 1 \Longleftrightarrow u \to 0. \tag{13}$$

On a donc d'après (10),

$$1-u=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right),$$

et donc

$$u=\frac{x^2}{2}-o\left(x^2\right)=\frac{x^2}{2}\left(1-\varepsilon(x)\right),$$

avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers zéro quand $x$tend vers zéro. Nous noterons de façon générique toute telle fonction Nous obtenons alors

$$x^2=2u(1-\varepsilon(x))^{-1}=2u(1+\varepsilon(x)),$$

et puisque x et u sont positifs, on obtient

$$x=\sqrt{2u}\sqrt{(1+\varepsilon(x))}=\sqrt{2u}\left(1+\varepsilon(x)\right),$$

ce qui permet de conclure en remplaçant $\varepsilon(x)$ par $\varepsilon(y)$ qui tend vers zéro quand x tend vers 0 et donc quand y tend vers 1.

On en déduit finalement le résultat suivant :

$$\forall y\in[0,1],\quad \forall x\in[0,\pi/2],\quad \left(x=\arccos y\Longrightarrow x=\sqrt{2(1-y)}(1+\varepsilon(y)),\right) \tag{14a}$$

avec

$$\lim_{y\to 1}\varepsilon(y)=0. \tag{14b}$$

Nous nous servirons de cela comme approximation et nous noterons de façon abusive :

$$\forall y\in[0,1],\quad \forall x\in[0,\pi/2],\quad \left(x=\arccos y\Longrightarrow x\approx\sqrt{2(1-y)},\right) \tag{15}$$

cette équation étant d'autant plus vraie que x est proche de zéro ou y proche de 1. Tous les développements limités intervenant plus loin seront, de la même façon, remplacés par des approximations où les termes en o sont négligés.

(b) On constate que h_1 est négligeable devant R de sorte que

$$\frac{R}{R+h_1}=\left(\frac{R+h_1}{R}\right)^{-1}$$

et donc

$$\frac{R}{R+h_1}=(1+\eta)^{-1}, \tag{16}$$

avec

$$\eta=\frac{h_1}{R}\text{ négligeable devant 1.} \tag{17}$$

Puisque l'on a

$$\frac{R}{R+h_1}=(1+\eta)^{-1}=1-\eta+o\left(\eta\right),$$

on a donc

$$\frac{R}{R+h_1}\approx 1-\eta$$

et donc

$$\frac{R}{R+h_1}\approx 1-\frac{h_1}{R}. \tag{18}$$

Ainsi, d'après (15)

$$\arccos\left(\frac{R}{R+h_1}\right)\approx\sqrt{2\left(1-\left(1-\frac{h_1}{R}\right)\right)}\approx\sqrt{\frac{2h_1}{R}}.$$

L'expression de h_2 (8) fournit donc

$$h_2 \approx R\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R}-\sqrt{\frac{2h_1}{R}}\right)}-1\right), \tag{19}$$

On continue les développements limités d'ordre 1 et leur remplacement par des approximations. On écrit, au voisinage de zéro

$$\begin{aligned}(1+v)^{-1} &= 1-v+o(v) \approx 1-v,\\ \cos(w) &= 1-\frac{1}{2}w^2+o(w^2) \approx 1-\frac{1}{2}w^2.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\frac{d}{R}-\sqrt{\frac{2h_1}{R}}$ est négligeable devant 1, on a d'après (19),

$$\begin{aligned}h_2 &\approx R\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R}-\sqrt{\frac{2h_1}{R}}\right)}-1\right),\\ &\approx R\left(\left(\cos\left(\frac{d}{R}-\sqrt{\frac{2h_1}{R}}\right)\right)^{-1}-1\right),\\ &\approx R\left(\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{R}-\sqrt{\frac{2h_1}{R}}\right)^2\right)^{-1}-1\right),\\ &\approx R\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{R}-\sqrt{\frac{2h_1}{R}}\right)^2-1\right),\\ &\approx \frac{R}{2}\left(\frac{d}{R}-\sqrt{\frac{2h_1}{R}}\right)^2,\end{aligned}$$

et donc, après simplification

$$h_2 = \frac{1}{2R}\left(d-\sqrt{2h_1R}\right)^2. \tag{20}$$

Avec cette approximation, on obtient numériquement

$$h_2 = 1.5971 \text{ m}, \tag{21}$$

ce qui est apparemment identique à (9) L'écart entre les deux distances (en m.) est très faible :

$$\varepsilon = 2.178\,10^{-6} \text{ m}, \tag{22}$$

Remarque 2. On peut tracer h_2 pour d décrivant l'intervalle $[l, l+\lambda]$, où l est donnée par (4), et pour laquelle, h_2 est nul.

Voir la figure 3 page suivante, sur laquelle on constate que les valeurs exacte et approchée donnent les mêmes courbes.

(2) Citons deux extraits différents issus et adaptés de `https://planet-terre.ens-lyon.fr/article/Terre-ronde-Eratosthene.xml` correspondant à deux mesures du périmètre de la Terre.

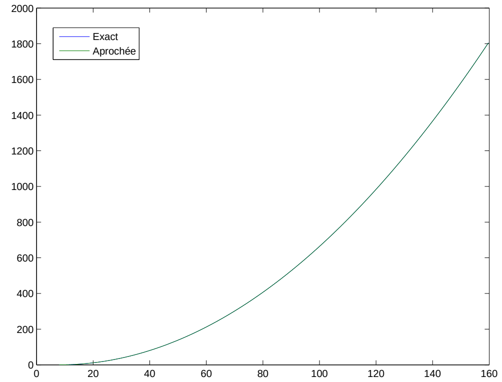

FIGURE 3. La courbe $h_2(d)$ (exacte et approchée).

(a)

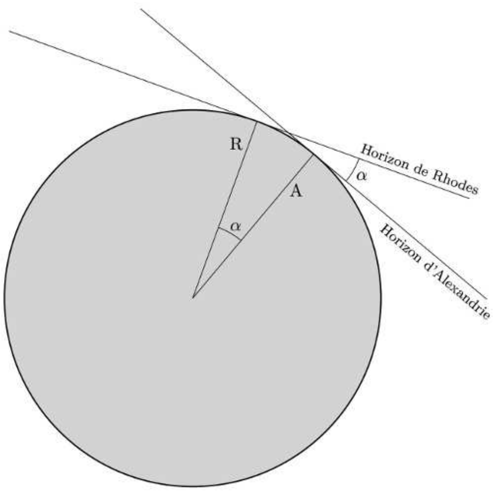

FIGURE 4. Principe de la mesure de la circonférence terrestre par Posidonius.

Voir la figure 4.

L'estimation de la taille de la Terre est effectivement tentée par les grecs en observant l'heure de lever des étoiles dans deux lieux supposés sur le même méridien, Rhodes ($36°10'00''$ N, $28°0'0''$ E) et Alexandrie ($31°11'53''$N, $29°55'9''$E). L'étoile Canopus se prête particulièrement bien à ce calcul. Lorsqu'elle culmine à $0°$ à Rhodes (brève apparition et disparition sur le même point de l'horizon), elle culmine alors à $7,5°$ à Alexandrie à cette même date. Les deux cités sont donc séparées par $1/48$ ème (7,5/360) de circonférence terrestre. Ce calcul basé sur l'observation de Canopus est attribué au stoïcien Posidonius d'Apamée (135-51 av. J.-C.) par un autre philosophe stoïcien, Cléomède.

On rappelle que l'on a effet les formules suivantes, en notant l la distance entre les deux villes, L le périmètre de la Terre, R le rayon terrestre et α l'angle $7,5°$, exprimé en radian :

$$l = \alpha R,$$
$$L = 2\pi R$$

ce qui fournit par division

$$L = l\frac{2\pi}{\alpha}, \tag{23}$$

ou, si α est exprimé en degrés :

$$L = l\frac{360}{\alpha}. \tag{24}$$

Ici, on a donc, avec $l = 40000/48 = 833$ km :

$$L = 833 \times \frac{360}{7,5}$$

soit

$$L = 40\,983\text{km}. \tag{25}$$

Cela suppose connue bien sûr la distance entre les deux villes !

(b)

L'importance des travaux d'Archimède (287–212 av. J.-C.) tient à ce que, en raisonnant en ingénieur pour développer des mathématiques appliquées à des problèmes pratiques, il a pu s'affranchir de la distinction épistèmê / technê et de l'interdiction tacite d'user des mathématiques pour expliquer les phénomènes naturels. Archimède est notamment l'un des savants qui proposent une valeur à la circonférence de la Terre, qu'il estime à 300 000 stades (soit 47 250 km en se basant sur le stade égyptien de 157,5 m). Ses manuscrits seront édités par Ératosthène (v. 276 -v. 194 av. J.-C.), précepteur du roi Ptolémée IV et conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie à l'âge de 40 ans. Bien que l'on ne connaisse que quelques fragments de l'œuvre scientifique d'Ératosthène, il serait l'initiateur de la division du globe par un système de lignes méridiennes et latitudinales. C'est surtout à lui que l'on attribue, à la suite de Cléomède, le calcul d'une valeur correcte de la circonférence terrestre, par le raisonnement et la mesure résumés sur la figure 5.

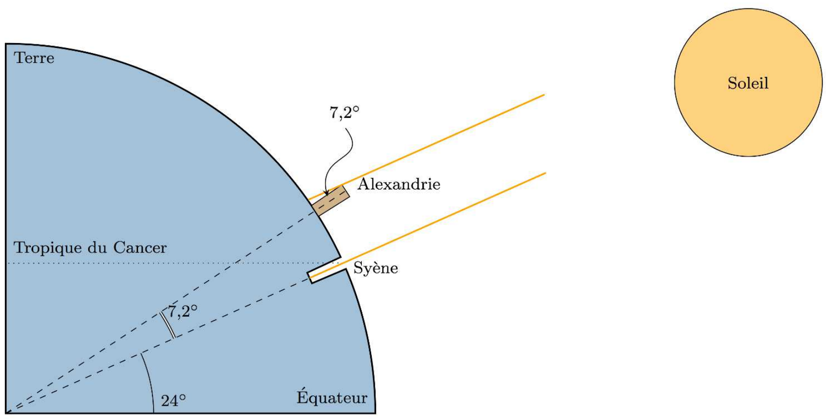

FIGURE 5. Principe de la mesure de la circonférence terrestre par Ératosthène.

Ce raisonnement est le suivant (voir aussi la figure 5. :

- Ératosthène considère que Syène (positionnée sur le tropique du Cancer) et Alexandrie sont alignées sur le même méridien, ce que l'on sait aujourd'hui très approximatif (Syène se situe à $32°53'31''$E, Alexandrie à $29°55'9''$E, soit 3° de différence, c'est-à-dire 12 minutes de décalage horaire).

- Les rayons du Soleil sont supposés parallèles en raison de l'éloignement de l'astre (cette hypothèse est majeure, puisqu'un Soleil de petite taille et peu éloigné d'une Terre plate produirait aussi des rayons inclinés à Alexandrie : le raisonnement d'Ératosthène est donc "chargé de théorie", celle d'une Terre sphérique) ; les droites qui coupent ces droites parallèles donnent des angles alternes égaux.
- Considérant que les arcs qui sous-tendent des angles égaux sont semblables, Ératosthène mesure l'angle de l'ombre du gnomon à Alexandrie à l'heure où, à Syène, le Soleil au zénith éclaire le fond d'un puits.

Le gnomon (voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Gnomon`) est ici un simple baton planté dans le sol, permettant ici la mesure de l'angle $\alpha = 7,2^\circ$. Là-encore, on utilise la formule (24) et la distance connue entre les deux villes Alexandrie et Syène.

Correction de l'exercice 4.

(1) En dérivant $\ln(x)$ et intégrant x^3, on obtient :

$$I = -\frac{15}{16} + 4\,\ln(2)\,.$$

(2) On obtient

$$I = 1/4\,\pi.$$

Correction de l'exercice 5.

On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation superflue et le système admet un ensemble infini de solution.