Informatique 3A MFIappro — Automne 2020

Corrigé de l'examen du 27 Janvier 2021

Ce corrigé renvoie à des références de l'ensemble des documents pédagogiques (Cours, TD et TP) qui ont ont été réactualisés en date du 2 février 2021 ; prière de consulter la dernière version disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Correction de l'exercice 1.
Donnons deux façons de faire.

(1) La première consiste à calculer les quatre premiers termes de $(1+x)^m$ puis les quatre premiers termes du développement limité de $(1-x)^{-m}$ à l'ordre 4 en zéro (voir annexe A du cours) puis de multiplier les deux facteurs. On obtient en effet, dans un premier temps :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{1}{2}m(m-1)x^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)x^3 + \frac{1}{24}m(m-1)(m-2)(m-3)x^4 + o\left(x^4\right). \quad (1)$$

Si on applique (1) en remplaçant m par $-m$, on a

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{1}{2}(-m)(-m-1)x^2 + \frac{1}{6}(-m)(-m-1)(-m-2)x^3 + \frac{1}{24}(-m)(-m-1)(-m-2)(-m-3)x^4 + o\left(x^4\right),$$

et donc

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{1}{2}m(m+1)x^2 - \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)x^3 + \frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3)x^4 + o\left(x^4\right),$$

et puis en changeant x en $-x$:

$$(1-x)^{-m} = 1 + mx + \frac{1}{2}m(m+1)x^2 + \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)x^3 + \frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3)x^4 + o\left(x^4\right). \quad (2)$$

Il ne reste plus qu'à multiplier les deux équations (1) et (2), en ne conservant que les termes d'ordre inférieur à 4. On obtient successivement le terme

- constant
$$1$$
- d'ordre 1 :
$$mx + mx = 2mx.$$
- d'ordre 2 :
$$\left(\frac{1}{2}m(m-1) + m^2 + \frac{1}{2}m(m+1)\right)x^2 = \frac{1}{2}\left(m^2 - m + 2m^2 + m^2 + m\right)x^2 = 2m^2x^2$$

- d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)+\frac{1}{2}m^2(m+1)+\frac{1}{2}m^2(m-1)+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\right)x^3,\\
&=\frac{1}{6}\left(m(m+1)(m+2)+3m^2(m+1)+3m^2(m-1)+m(m-1)(m-2)\right)x^3,\\
&=\frac{1}{6}\left(m(m^2+3m+2)+3m^3+3m^2+3m^3-3m^2+m(m^2-3m+2)\right)x^3,\\
&=\frac{1}{6}\left(m^3+3m^2+2m+3m^3+3m^2+3m^3-3m^2+m^3-3m^2+2m\right)x^3,\\
&=\frac{1}{6}\left(8m^3+4m\right)x^3,\\
&=\frac{1}{3}\left(4m^3+2m\right)x^3.
\end{aligned}$$

- d'ordre 4 :

$$\left(\frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3)+\frac{1}{6}m^2(m+1)(m+2)+\frac{1}{2}m(m+1)\times\frac{1}{2}m(m-1)+ \ldots \right.$$
$$\left.\frac{1}{6}m^2(m-1)(m-2)+\frac{1}{24}m(m-1)(m-2)(m-3)\right)x^4$$

soit encore

$$\frac{1}{24}\left((m+1)(m^2+5m+6)+(m-1)(m^2-5m+6)+4m^2(m^2+3m+2+m^2-3m+2)+6m(m^2-1)\right)x^4$$

soit encore après calculs

$$\frac{1}{3}\left(2m^4+4m^2\right)x^4$$

En regroupant tous ces termes, on obtient

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m=1+2mx+2m^2x^2+\frac{4m^3+2m}{3}x^3+\frac{2m^4+4m^2}{3}x^4+o\left(x^4\right). \tag{3}$$

Vérifions cela avec matlab.

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m=1+2\,mx+2\,m^2x^2+4/3\,x^3m^3+2/3\,x^3m+2/3\,x^4m^4+4/3\,x^4m^2.$$

(2) La seconde, plus rapide, consiste à ne pas calculer le produit en écrivant pour tout réel α

$$(1+x)^\alpha=e^{\left(\alpha\ln(1+x)\right)},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m&=e^{m\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)},\\
&=e^{m\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)}
\end{aligned}$$

On écrit en zéro

$$\begin{aligned}
\ln(1+x)&=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right),\\
\ln(1-x)&=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$m(\ln(1+x)-\ln(1-x))=2mx+\frac{2m}{3}x^3+o\left(x^4\right) \tag{4}$$

qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. On écrit enfin en zéro

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o\left(u^4\right),$$

et donc pour $u = 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + o\left(x^4\right)$, (4) donne

$$\begin{aligned}
e^{m(\ln(1+x)-\ln(1-x))} &= 1 + 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(2mx + \frac{2m}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2mx + \frac{2m}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{24}\left(2mx + \frac{2m}{3}x^3\right)^4 + o\left(x^4\right),\\
&= 1 + 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + 2m^2x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^2 + \frac{4m^3}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^3 + \frac{2m^4}{3}x^4\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^4 + o\left(x^4\right),\\
&= 1 + 2mx + \frac{2m}{3}x^3 + 2m^2x^2\left(1 + \frac{2}{3}x^2\right) + \frac{4m^3}{3}x^3 + \frac{2m^4}{3}x^4 + o\left(x^4\right),\\
&= 1 + 2mx + 2m^2x^2 + \left(\frac{2m}{3} + \frac{4m^3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{4m^2}{3} + \frac{2m^4}{3}\right)x^4 + o\left(x^4\right),
\end{aligned}$$

ce qui redonne (3).

Vérifions cela avec matlab.

$$m(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = 2\,mx + 2/3\,x^3m + o\left(x^4\right),$$

$$e^{(m(\ln(1+x) - \ln(1-x)))} = 1 + 2\,mx + 2\,m^2x^2 + 4/3\,x^3m^3 + 2/3\,x^3m + 2/3\,x^4m^4 + 4/3\,x^4m^2 + o\left(x^4\right).$$

Correction de l'exercice 2.

L'objectif de cet exercice est de retrouver certaines primitives :

$$\int \frac{dx}{bx-c},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

sur des intervalles où ces fonctions sont définies et d'utiliser ces primitives pour quelques calculs d'intégrales.

(1) (a) Soient b un réel non nul et c un réel quelconque. Si $bx - c > 0$, on a

$$f'(x) = (\ln|bx-c|)' = (\ln(bx-c))' = \frac{b}{bx-c}.$$

Si $bx - c < 0$, on a

$$f'(x) = (\ln(-bx+c))' = \frac{-b}{-bx+c} = \frac{b}{bx-c}$$

et donc, dans les deux cas,

$$(\ln|bx-c|)' = \frac{b}{bx-c}. \tag{5}$$

On en déduit sur un intervalle où $bx - c$ ne s'annule pas

$$\int \frac{dx}{bx-c} = \frac{1}{b}\ln|bx-c|. \tag{6}$$

Remarque 1. On peut aussi, de façon plus générale remarquer que, si on se place sur un intervalle où la fonction u ne s'annule pas, on a

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}. \tag{7}$$

En effet, si u est strictement positive, on a

$$(\ln|u|)' = (\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Si u est strictement négative, on a

$$(\ln|u|)' = (\ln(-u))' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}.$$

On a donc dans les deux cas :

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|, \tag{8}$$

et on retrouve les résultats de la question 1a.

Pour tout la suite, on suppose

$$b > 0. \tag{9}$$

(b) La fonction $bx - c$ ne s'annule qu'en $x = c/b$. D'après (9), $bx - c$ est donc strictement positif sur $]c/b, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}\frac{c}{b} + 1 &= \frac{c+b}{b},\\ \frac{c}{b} + 2 &= \frac{c+2b}{b},\end{aligned}$$

et puisque

$$\frac{c}{b} < \frac{c+b}{b} < \frac{c+2b}{b},$$

on a d'après (6),

$$\begin{aligned}\int_{(c+b)/b}^{(c+2b)/b} \frac{dx}{bx-c} = \frac{1}{b}[\ln|bx-c|]_{x=(c+b)/b}^{x=(c+2b)/b} &= \frac{1}{b}\left(\ln\left|b\left(\frac{c+2b}{b}\right)-c\right| - \ln\left|b\left(\frac{c+b}{b}\right)-c\right|\right),\\ &= \frac{1}{b}\left(\ln|c+2b-c| - \ln|c+b-c|\right),\\ &= \frac{1}{b}\left(\ln|2b| - \ln|b|\right),\\ &= \frac{1}{b}\ln\frac{|2b|}{|b|},\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{c/b+1}^{c/b+2} \frac{dx}{bx-c} = \frac{\ln 2}{b}. \tag{10}$$

On a de même

$$\begin{aligned}\frac{c}{b} - 1 &= \frac{c-b}{b},\\ \frac{c}{b} - 2 &= \frac{c-2b}{b},\end{aligned}$$

et puisque

$$\frac{c-2b}{b} < \frac{c-b}{b} < \frac{c}{b},$$

on a d'après (6),

$$\begin{aligned}\int_{(c-2b)/b}^{(c-b)/b} \frac{dx}{bx-c} = \frac{1}{b}[\ln|bx-c|]_{x=(c-2b)/b}^{x=(c-b)/b} &= \frac{1}{b}\left(\ln\left|b\left(\frac{c-b}{b}\right)-c\right| - \ln\left|b\left(\frac{c-2b}{b}\right)-c\right|\right),\\ &= \frac{1}{b}\left(\ln|c-b-c| - \ln|c-2b-c|\right),\\ &= \frac{1}{b}\left(\ln|-b| - \ln|-2b|\right),\\ &= \frac{1}{b}\ln\frac{|b|}{|2b|},\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{c/b+1}^{c/b+2} \frac{dx}{bx-c} = -\frac{\ln 2}{b}. \tag{11}$$

(2) Dans l'énoncé, pour cette question, la valeur de a était choisie égale à 1, valeur qu'il suffira de prendre dans la suite de ce corrigé. On suppose donc pour toute la suite

$$a > 0. \tag{12}$$

(a) Déterminons la dérivée de la fonction $\arcsin(x/a)$, qui est définie si $x \in [-a, a]$ et dérivable si $x \in]-a, a[$. On a

$$\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\arcsin'\left(\frac{x}{a}\right). \tag{13}$$

On a aussi grâce à la formule (4.19g) du cours, appliquée ici à $f = \sin$, pour tout $y \in]-1, 1($

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))},$$

que l'on transforme en utilisant $\arcsin(y) \in]-\pi/2, \pi/2[$ et donc $\cos(y) \geq 0$, en écrivant

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{|\cos(\arcsin(y))|} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

ce qui permet d'écrire à partir de (13),

$$\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}},$$

soit finalement

$$\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{14}$$

On en déduit donc sur tout intervalle inclus dans $]-a, a[$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \tag{15}$$

C'est en fait vrai sur tout intervalle inclus dans $[-a, a]$, puisque la limite de $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ existe si x tend $-a$ ou vers a même si la fonction $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ n'est pas définie en $\pm a$. Ici, nous avions en fait *a priori* une intégrale dite impropre mais dont l'aspect impropre, au voisinage de $x = \pm a$ disparaît grâce au caractère continu de sa primitive $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ en $\pm a$. On a donc montré que

$$\text{sur tout intervalle inclus dans } [-a, a], \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \tag{16}$$

Remarque 2. Pour déterminer cette primitive, on peut utiliser les techniques plus générales de section E.4.2 de l'annexe E du cours. Il est ici aussi classique (en utilisant les techniques de la section 7.4.3 du cours) de faire le changement de variable

$$x = a\sin(u). \tag{17}$$

Si on se place sur un l'intervalle $[-a, a]$, alors u décrit l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et on a

$$dx = a\cos(u)du$$

et

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{-a\cos(u)du}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2(u)}},\\
&= a\int \frac{\cos(u)}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2(u)}}du,\\
&= a\int \frac{\cos(u)}{\sqrt{a^2(1-\sin^2(u))}}du,\\
&= a\int \frac{\cos(u)}{\sqrt{a^2}\sqrt{cos^2(u)}}du,\\
&= a\int \frac{\cos(u)}{|a||\cos(u)|}du,
\end{aligned}
$$

et d'après (12), et le fait que sur $[-\pi/2, \pi/2]$, le cosinus est positif :

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)}du,\\
&= \int du,\\
&= u.
\end{aligned}
$$

On revient à x en utilisant (17), qui implique, puisque $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $x \in [-a, a]$:

$$u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right),$$

et donc

$$\text{sur tout intervalle inclus dans } [-a, a],\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \tag{18}$$

(b) Dans cette question, on souhaite calculer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}. \tag{19}$$

par parité de cette fonction, on peut supposer que l'on est sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $x^2-a^2>0$, on a donc

$$x > a,$$

que l'on pourra remplacer par

$$x \geq a. \tag{20}$$

Cela sera justifié a posteriori.

Pour déterminer cette primitive, on utilise en fait les techniques plus générales de section E.4.2 de l'annexe E du cours.

(i) On fait donc, comme indiqué dans les références ci-dessus, le changement de variable

$$\sqrt{x^2-1} = x+t. \tag{21}$$

On en déduit que

$$x = -\frac{t^2+a^2}{2t}, \tag{22}$$

puis que

$$dx = \frac{-t^2+a^2}{2t^2}dt \tag{23}$$

Voir détails du calcul sur http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFIappro/correction_manuscrite_provisoire/01.pdf

Pour la suite du calcul, on utilise les techniques habituelles de la section 7.4.3 page 44 du cours.

(ii) On a

$$F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right). \tag{24}$$

et en particulier pour $a=1$:

$$F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right). \tag{25}$$

On a donc montré que

$$\text{sur tout intervalle inclus dans } [a,+\infty[,\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right). \tag{26}$$

Voir détails du calcul sur http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFIappro/correction_manuscrite_provisoire/01.pdf

(c) D'après les calculs qui précèdent, on a donc successivement

(i)

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{x=2}^{x=4},\\ &= \ln\left(4+\sqrt{15}\right)-\ln(2+\sqrt{3}),\\ &= \ln\left(\frac{4+\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin(1)-\arcsin(0),\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

On remarque que la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est pas continue en 1 néanmoins son intégrale existe sur $[0,1]$. C'est donc une intégrale impropre Voir par exemple l'annexe F du cours sur cette notion. Cet aspect impropre disparaissait en fait à cause de l'aspect continue de la foncton arcsin en 1 !

(iii) Ici, il est indispensable de constater que $\sqrt{|x^2-1|}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ mais que $\left|x^2-1\right|$ prend une expression différente sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$ à cause du changement de signe de x^2-1 de part et d'autre de -1. Il faut donc bien séparer l'intégrale en deux et écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}+\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}},\\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},\end{aligned}$$

on utilise le calcul fait ci-dessous ;

$$\begin{aligned}&= \frac{\pi}{2}+\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{x=1}^{x=5},\\ &= \frac{\pi}{2}+\ln\left(5+\sqrt{24}\right)-\ln 1,\\ &= \frac{\pi}{2}+\ln\left(5+2\sqrt{6}\right).\end{aligned}$$

Là encore, nous avions une intégrale impropre au voisinage du point 1 en lequel $\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$ avait une limite infinie. En séparant proprement l'intervalle $[0, 5]$ en deux sous-intervalles $[0, 1]$ et $[1, 5]$ pour lesquels chacune des deux primitives est continue en 1, l'aspect impropre de l'intégrale disparaissait donc !

Remarque 3. Ces primitives figure dans l'annexe C du cours.

Remarque 4. Notons qu'avec matlab, ces calculs sont possibles. En tapant

```
syms a b c x;
disp(int(1/(b*x-c),x));
disp(int(1/sqrt(x^2-a),x));
disp(int(1/sqrt(1-x^2),x));
disp(int(1/sqrt(a^2-x^2),x));
```

on obtient

$$\int \frac{1}{bx-c} = \frac{\ln(bx-c)}{b},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right).$$

Remarque 5. Notons qu'avec matlab, ces calculs sont possibles. En tapant

```
syms x;
disp(simple(int(1/sqrt(x^2-1),x,2,4)));
disp(simple(int(1/sqrt(1-x^2),x,0,1)));
disp(simple(int(1/sqrt(abs(x^2-1)),x,0,5)));
```

on obtient

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4+\sqrt{15}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1/2\,\pi,$$

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}} = 1/2\,\pi + \ln\left(5+2\sqrt{6}\right).$$

Remarque 6. On peut aussi utiliser la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique pour calculer $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, comme on a procédé dans la question 2. Voir détails du calcul sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFIappro/correction_manuscrite_provisoire/02.pdf`

Remarque 7. Trichons allégrement et écrivons que si A est un réel positif, on a

$$\sqrt{-A} = \sqrt{(-1)\times A} = \sqrt{-1}\sqrt{A}$$

et donc

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{-A} = i\sqrt{A} \tag{27}$$

ce que l'on peut vérifier en écrivant que les carrés de cette équation donnent bien

$$-A = \left(\sqrt{-A}\right)^2 = \left(i\sqrt{A}\right)^2 = i^2\left(\sqrt{A}\right)^2 = -A. \tag{28}$$

Si on applique (27) pour tout réel $x \geq a$ on a $a^2 - x^2 \leq 0$ et donc

$$\forall x \geq a, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = i\sqrt{x^2 - a^2}$$

et donc

$$\forall x \geq a, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = -i\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{29}$$

Servons nous de cette égalité pour montrer (en étant conscient que l'on triche !) (26) à partir de (16). D'après (29), on a donc, sur tout intervalle inclus dans $[-a, a]$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{-i\sqrt{a^2 - x^2}} = i \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

et donc, d'après (16),

$$\text{sur tout intervalle inclus dans } [-a, a], \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = i \arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \tag{30}$$

Ici, le terme $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ n'est pas défini pour $x > a$ car l'arcsin n'est pas défini pour $x > 1$. Néanmoins, l'arcsin est défini en fait sur $\mathbb{C}$ tout entier et en particulier sur $]-1, +\infty[$.
Voir par exemple
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_cosinus`,
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Arc_sinus`,
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonométrie_complexe`,
ou encore le cours [Bas19] en particulier l'annexe intitulée "Définitions des fonctions complexes arcsin et arccos (sous la forme d'un exercice corrigé)". On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \arcsin(z) = -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{31}$$

Attention, cela utilise la notion propre de $\sqrt{}$ sur $\mathbb{C}$, qui peut être définie à partir du logarithme complexe (voir [Bas19, chapitre "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$" et annexe intitulée "Redéfinitions des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$ (sous la forme d'un exercice corrigé)"]). et en particulier

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \arcsin(t) = \frac{\pi}{2} - i \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right|.$$

et donc, puisque $t + \sqrt{t^2 - 1} \geq 0$

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \arcsin(t) = \frac{\pi}{2} - i \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right). \tag{32}$$

En particulier pour $t = x/a$ pour $x \geq a$, sur tout intervalle inclus dans $[a, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) &= \frac{\pi}{2} - i \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right), \\
&= \frac{\pi}{2} - i \ln\left(\left(\frac{1}{a}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right), \\
&= -i \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \frac{\pi}{2} - i \ln\left(\frac{1}{a}\right), \\
&= -i \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \frac{\pi}{2} + i \ln a,
\end{aligned}$$

et on a donc d'après (30), sur tout intervalle inclus dans $[a, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= i\left(-i \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \frac{\pi}{2} + i \ln a\right), \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \frac{i\pi}{2} - \ln a
\end{aligned}$$

et on retrouve donc bien (26) à une constante additive près.
Tous ces calculs peuvent être tout à fait rendus rigoureux en consultant [Bas19, chapitre "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$" et annexe intitulée "Redéfinitions des fonctions complexes $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto z^{1/n}$ (sous la forme d'un exercice corrigé)"]).

Correction de l'exercice 3.
On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation superflue et le système admet un ensemble infini de solution.

Références

[Bas19] J. Bastien. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3.* Notes de cours de l'UV OMI3 de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2019. 229 pages.