Informatique 3A MFIappro Automne 2021

Corrigé de l'examen du 07 Décembre 2021

Correction de l'exercice 1.

On écrit, grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de cos en zéro à l'ordre 4 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right).$$

et donc

$$\cos x = 1 + u,$$

où

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right),$$

qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. On écrit, ensuite grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de $\ln(1+u)$ en zéro à l'ordre 4 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right)$$

Remplaçons u par son expression en fonction de x :

$$\ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^4.$$

On calcule le terme quadratique $-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2$ en ne conservant que l'unique terme d'ordre inférieur à 4 :

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2 = -\frac{x^4}{8}$$

Les autres termes (de puissance 3 et 4) ne contiennent que des termes d'ordre supérieurs à 5 et donc

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o\left(u^4\right),$$

et donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(u^4\right),$$

qui ne contient bien que des termes pairs puisque la fonction étudiée est paire.
Vérifions cela avec matlab. On obtient bien en tapant

```
syms x;
pretty(taylor(log(cos(x)),5));
```

$$\ln(\cos(x)) = -1/2\,x^2 - 1/12\,x^4 + o\left(x^3\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) La dérivée de f

$$\forall x>0, \quad f(x)=\ln(x)-x,$$

est donnée par

$$\forall x>0, \quad f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x},$$

strictement positive sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. On a $f(0+)=-\infty$, $f(1)=-1$ et $f(+\infty)=-\infty$.

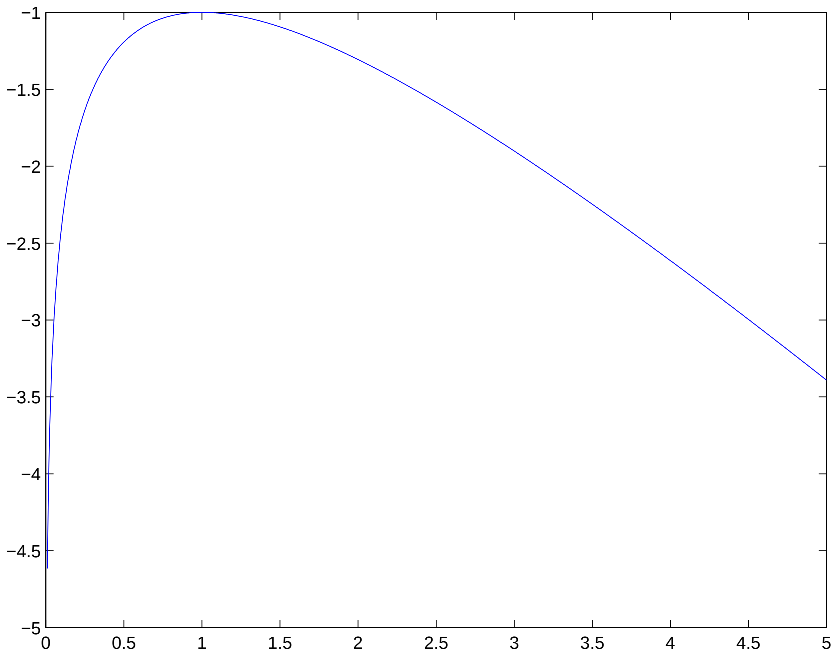

Figure 1. Le graphe de f.

Le graphique de f est représenté sur la figure 1.

(2) (a) On a, pour tout $x>0$,

$$f'(x)=e^x-1,$$

et donc f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ valent $+\infty$ et $+\infty$. Enfin, $f(0)=0$. Tout cela permet de dresser le tableau de variation de f.

Voir le graphique 2.

(b) (i)

Voir le graphique 3.

(ii) On a $\exp'(0)=1$ et d'après l'équation (4.11) du cours, la tangente a pour équation $y=x+1$.

(iii) Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est nul et donc f est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie, que pour tout x, $e^x\geq x+1$ et donc que la courbe representatrice de l'exponentielle est au-dessus de la tangente.

Correction de l'exercice 3.

(1) On obtient

$$f'(x)=-\sin(x)\,e^{\cos(x)}+1+(\tan(x))^2\,.$$

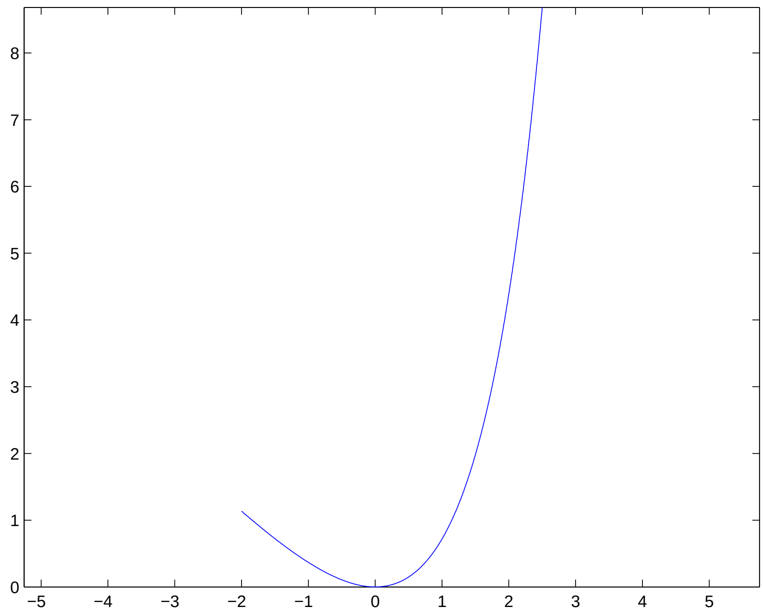

FIGURE 2. La courbe de f.

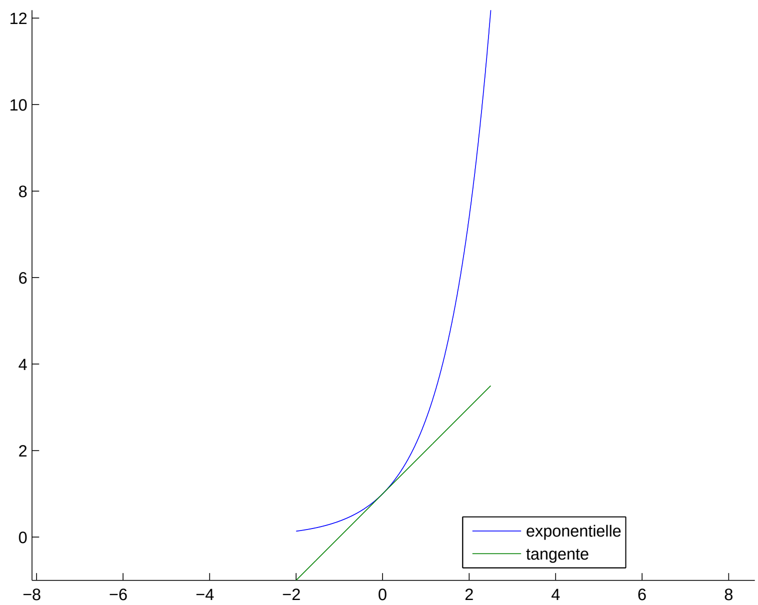

FIGURE 3. La courbe de l'exponentielle et sa tangente au point $x = 0$.

(2) (a) On obtient

$$G(x) = \int g(x)dx = 1/2\, x^2 \ln(x) - 1/4\, x^2.$$

(b) Ainsi,

$$I = \int_0^1 g(x)dx = G(1) - G(0) = -1/4.$$

Correction de l'exercice 4.

On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$