Informatique 3A MFIappro — Automne 2023

Corrigé de l'examen du 6 Décembre 2023

Correction de l'exercice 1.

(1) (a) Naïvement, on a tendance à répondre que la gomme coûte 1 € et donc que le stylo, coûtant 10 € de plus, coûte 11 €. Cela ne va pas, car j'ai payé en tout $1 + 11 = 12$ €.

(b) Notons x le prix de la gomme et y celui du stylo. On a donc les relations qui traduisent l'énoncé :

$$\begin{aligned} y &= x + 10, \\ x + y &= 11, \end{aligned}$$

système de deux équations très simple à résoudre ! On écrit par exemple

$$11 = x + y = x + x + 10,$$

et donc

$$2x = 11 - 10 = 1,$$

et donc $x = 1/2$ €, soit cinquante centimes.

(2) (a) Il existe une solution unique donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Il n'existe aucune solution.

(c) Il existe une infinité de solutions donnée par $X = X_0 + H$ où

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et H est un vecteur quelconque décrivant le sous-espace vectoriel défini par les vecteurs indépendants dont les coordonnées sont en colonnes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Il existe une infinité de solutions donnée par $X = X_0 + H$ où

$$X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et H est un vecteur quelconque décrivant le sous-espace vectoriel défini par les vecteurs indépendants dont les coordonnées sont en colonnes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2.

Ils s'agissait d'observer que c'était les mêmes matrices que dans la question 2 de l'exercice 1 et les calculs du pivot de Gauss étaient identiques.

Plus précisément, on obtient les résultats suivants : noyau, image (donnés sous forme de vecteurs colonnes indépendants), rang et dimension du noyau

(1) (a)

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) rang : 2

(d) dimension du noyau : 0

(2) (a)

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) rang : 1

(d) dimension du noyau : 2

(3) (a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) rang : 2

(d) dimension du noyau : 2

(4) (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(c) rang : 2

(d) dimension du noyau : 2

Correction de l'exercice 3.

(1) Pour la première façon de procéder, on obtient :

(a)

$$\forall n \geq 0, \quad v_n = \frac{1}{2}n(n-1) \tag{1}$$

(b) puis

$$\forall n \geq 0, \quad y_n = \alpha + \frac{1}{2}n(n-1) \tag{2}$$

(2) Pour la deuxième, on obtient

(a) On obtient

$$\forall n \geq 0, \quad v_n = \alpha + \frac{1}{2}n(n-1) \tag{3}$$

(b) puis $y_n = v_n$.

Voir correction manuscrite provisoire détaillée sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/corresolequadifference01.pdf`

Correction de l'exercice 4.
Exercice issu de [BM03, exercice 1.2] auquel on renvoie.
On donne l'énoncé exact et son corrigé originaux, qu'on pourra adapter.
Énoncé

(1) Quel nombre rationnel est égal à $0,123123123...$ (le développement est périodique de période 123) ?

(2) En généralisant, montrer que tout nombre dont l'écriture en base 10 est périodique à partir d'un certain rang, est égal à un nombre rationnel. On pourra, pour simplifier, supposer que x, le nombre étudié, appartient à l'intervalle $[0,1[$. Avec les notations du chapitre 1 de [BM03]

$$x = \overline{0,pqqqq...}$$

où

- p est un entier positif écrit en base 10, avec r chiffres ;
- la période q est un entier strictement positif écrit en base 10, avec s chiffres.

Par exemple, pour $x = 0,43565123123123...$, on a

$$p = 43565, \quad q = 123, \quad r = 5, \quad s = 3.$$

Sous ces notations, on montrera que

$$x = \frac{\overline{pq} - \overline{p}}{10^r\left(10^s - 1\right)}. \tag{4}$$

Corrigé

(1) On peut raisonner comme pour l'exercice 12.3 et utiliser les séries géométriques en utilisant la définition de $0,123123123...$ en base 10, mais il est plus rapide d'utiliser le second procédé : on pose

$$x = 0,123123123... \tag{5}$$

Ainsi, on a

$$1000x = 123,123123123... \tag{6}$$

En soustrayant membre à membre (5) et (6), il vient

$$999x = 123$$

et après simplification

$$0,123123123... = \frac{41}{333}.$$

(2) Comme précédemment, on pose

$$x = \overline{0,pqqq...}$$

Puisque p possède r chiffres, on écrit

$$10^r x = \overline{p,qqq...} \tag{7}$$

Puisque q possède s chiffres, on écrit

$$10^s 10^r x = \overline{pq,qqq...} \tag{8}$$

En soustrayant membre à membre (7) et (8), il vient

$$10^r \left(10^s - 1\right) x = \overline{pq} - \overline{p}.$$

Or s est strictement positif donc $10^r \left(10^s - 1\right) \neq 0$ et (4) s'ensuit. L'égalité (4) nous montre que x est rationnel et nous fournit son écriture sous forme de fraction (à simplifier le cas échéant).

Par exemple, pour $x = 0,123123123...$, on a

$$p = 0 \quad q = 123 \quad r = 0 \quad s = 3$$

et on obtient

$$x = \frac{\overline{q}}{10^3 - 1} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}.$$

Pour $x = 0,43565123123123...$, on obtient

$$x = \frac{\overline{pq} - \overline{p}}{10^r \left(10^s - 1\right)} = \frac{43565123 - 43565}{10^5 \left(10^3 - 1\right)} = \frac{43521558}{99900000},$$

ce qui se simplifie en

$$x = \frac{7253593}{16650000}.$$

On pourra vérifier cette formule avec matlab.

Correction de l'exercice 5.

En cours de rédaction

Correction de l'exercice 6.

Voir les corrections des exercices de TD 13.1 et 13.2.

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.