Informatique 3A MFIappro

Automne 2018

Corrigé de l'examen initial du 25 Septembre 2018

Correction de l'exercice 1.

(1) On considère l'ensemble $S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$.
— L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
— Les 3 parties à 1 élément sont $\{\clubsuit\}$, $\{\diamondsuit\}$ et $\{\spadesuit\}$;
— Les 3 parties à 2 éléments sont $\{\clubsuit, \diamondsuit\}$, $\{\clubsuit, \spadesuit\}$ et $\{\diamondsuit, \spadesuit\}$;
— L'unique partie à 3 éléments est S ;
ce qui nous fait un total de 8 parties.

Pour l'écriture, c'est plus simple de remplacer $\clubsuit$ par 1, $\diamondsuit$ par 2, $\spadesuit$ par 3 et de refaire le raisonnement !

On considère l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$.
— L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
— Les 3 parties à 1 élément sont $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$;
— Les 3 parties à 2 éléments sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$;
— L'unique partie à 3 éléments est S ;
ce qui nous fait un total de 8 parties.

(2) On considère l'ensemble $S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$.
— L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
— Les 4 parties à 1 élément sont $\{\clubsuit\}$, $\{\diamondsuit\}$, $\{\spadesuit\}$ et $\{\heartsuit\}$;
— Les 6 parties à 2 éléments sont $\{\clubsuit, \diamondsuit\}$, $\{\clubsuit, \spadesuit\}$, $\{\clubsuit, \heartsuit\}$, $\{\diamondsuit, \spadesuit\}$, $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$ et $\{\spadesuit, \heartsuit\}$;
— Les 4 parties à 3 éléments sont $\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$, $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ et $\{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$;
— L'unique partie à 4 éléments est S ;
ce qui nous fait un total de 16 parties.

Pour l'écriture, c'est plus simple de remplacer $\clubsuit$ par 1, $\diamondsuit$ par 2, $\spadesuit$ par 3, $\heartsuit$ par 4 et de refaire le raisonnement !

On considère l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4\}$.
— L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
— Les 4 parties à 1 élément sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$;
— Les 6 parties à 2 éléments sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$;
— Les 4 parties à 3 éléments sont $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$;
— L'unique partie à 4 éléments est S ;
ce qui nous fait un total de 16 parties.

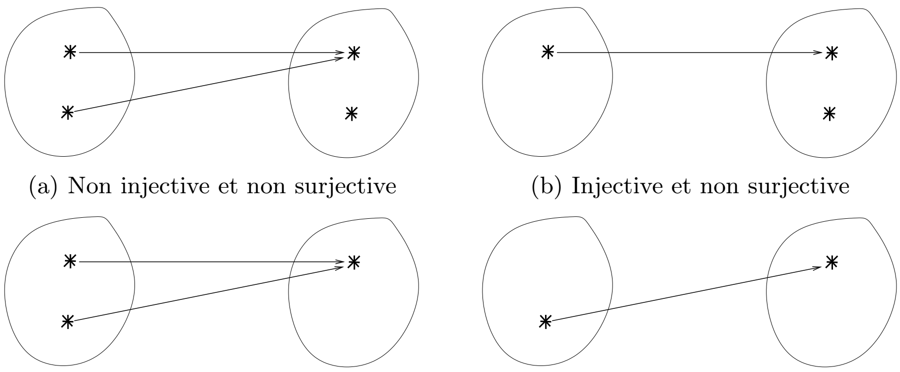
Correction de l'exercice 2.

(1) Sous forme de patate, on peut raisonner ainsi :

On renvoie à la figure 1 où chacune des situations est présentée :

(a) Pour la figure 1(a), un des éléments de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent et l'autre en a deux donc l'application est ni surjective ni injective ;

(b) Pour la figure 1(b), un des éléments de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent et l'autre en a un seul donc l'application est non surjective et injective ;



(a) Non injective et non surjective

(b) Injective et non surjective

(c) Non injective et surjective

(d) bijective

Figure 1. Quatre exemples différents d'applications.

(c) Pour la figure 1(c), l'unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents donc l'application est non injective et surjective ;

(d) Pour la figure 1(d), les deux ensemble ont un seul élément et donc le seul élément de l'ensemble de départ a un unique élément dans l'ensemble d'arrivée. l'application est donc bien bijective.

On peut montrer que ces quatre situations correspondent aux situations optimales, utilisant des ensemble de cardinaux les plus faibles.

(2) Sous forme analytique, on peut raisonner ainsi :

Soit $f : \left| \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$. On pose, pour tout $x \in X$, $f(x) = x^2$ et on donne différents cas de figure :

(a) Pour, $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, f est ni injective, ni surjective. En effet
- $f(1) = f(-1) = 1$ donc 1 et -1, distincts, ont la même image.
- f n'est pas surjective, car -1 n'est pas atteint par f, puisqu'il n'existe aucun réel de carré égal à -1. On peut aussi remarquer, en utilisant le lemme 2.9, que
$$f(X) = \mathbb{R}_+,$$
et donc
$$f(X) \neq Y.$$

(b) Pour, $X = \mathbb{R}_+$ et $Y = \mathbb{R}$, f est injective, non surjective.
En effet
- si $f(x) = f(y)$, alors $x^2 = y^2$ et donc
$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
et donc $x = \pm y$. Puisque x et y sont tous les deux positifs, alors ils ne peuvent qu'être égaux.
- Comme pour le cas 2a, on conclue que f n'est pas surjective.

(c) Pour, $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}_+$, f est non injective, surjective.
En effet
- Comme pour le cas 2a, on conclue que f n'est pas injective.
- Tout nombre réel positif est le carré de sa racine carré [1]. Donc f est surjective. On peut aussi remarquer, en utilisant le lemme 2.9, que
$$f(X) = \mathbb{R}_+,$$

1. Cest même la définition de la racine ! Voir (1).

et donc

$$f(X) = Y.$$

(d) Pour, $X = \mathbb{R}_+$ et $Y = \mathbb{R}_+$, f est injective, surjective, donc bijective.

En effet

- f est injective, comme dans le cas 2b.
- f est surjective, comme dans le cas 2c.

On a donc la définition de la racine carrée :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \exists! x \in \mathbb{R}_+, \quad y = x^2. \tag{1a}$$

On pose alors

$$\sqrt{y} = x. \tag{1b}$$

$\diamondsuit$

Correction de l'exercice 3.

On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4.

f est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - x.$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 1,$$

strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. On a $f(0) = 1$, $f(+\infty) = \infty$ et $f(-\infty) = -\infty$.

Le graphique de f est représenté sur la figure 2 page suivante.

Correction de l'exercice 5.

On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = x^2 + 1 + o\left(x^3\right).$$

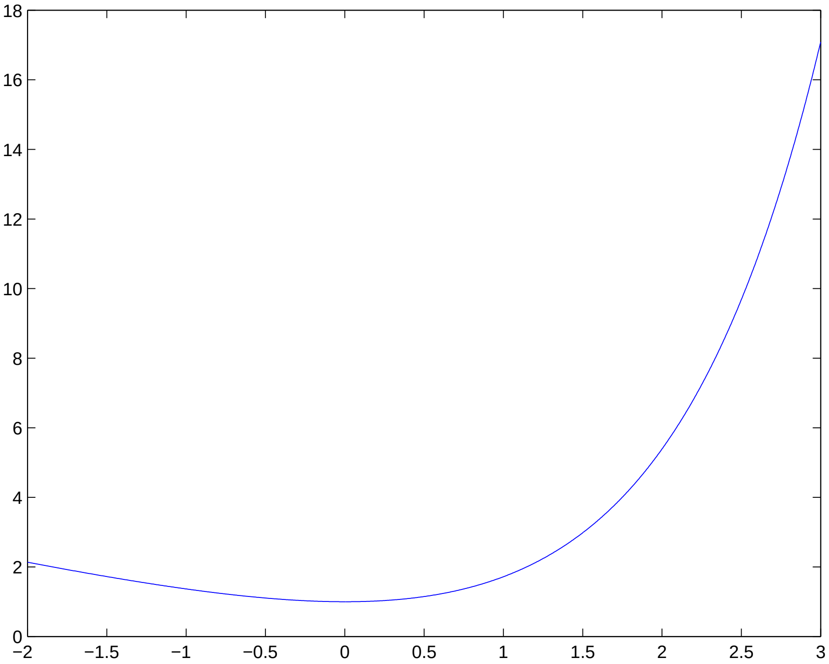


FIGURE 2. Le graphe de f.