Informatique 3A MFIappro — Automne 2020

Corrigé de l'examen initial du 11 Septembre 2020

Correction de l'exercice 1.

(1) On considère l'ensemble $S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$.
- L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
- Les 3 parties à 1 élément sont $\{\clubsuit\}$, $\{\diamondsuit\}$ et $\{\spadesuit\}$;
- Les 3 parties à 2 éléments sont $\{\clubsuit, \diamondsuit\}$, $\{\clubsuit, \spadesuit\}$ et $\{\diamondsuit, \spadesuit\}$;
- L'unique partie à 3 éléments est S ;

ce qui nous fait un total de 8 parties.

Pour l'écriture, c'est plus simple de remplacer $\clubsuit$ par 1, $\diamondsuit$ par 2, $\spadesuit$ par 3 et de refaire le raisonnement !

On considère l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$.
- L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
- Les 3 parties à 1 élément sont $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$;
- Les 3 parties à 2 éléments sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$;
- L'unique partie à 3 éléments est S ;

ce qui nous fait un total de 8 parties.

(2) On considère l'ensemble $S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$.
- L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
- Les 4 parties à 1 élément sont $\{\clubsuit\}$, $\{\diamondsuit\}$, $\{\spadesuit\}$ et $\{\heartsuit\}$;
- Les 6 parties à 2 éléments sont $\{\clubsuit, \diamondsuit\}$, $\{\clubsuit, \spadesuit\}$, $\{\clubsuit, \heartsuit\}$, $\{\diamondsuit, \spadesuit\}$, $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$ et $\{\spadesuit, \heartsuit\}$;
- Les 4 parties à 3 éléments sont $\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$, $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ et $\{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$;
- L'unique partie à 4 éléments est S ;

ce qui nous fait un total de 16 parties.

Pour l'écriture, c'est plus simple de remplacer $\clubsuit$ par 1, $\diamondsuit$ par 2, $\spadesuit$ par 3, $\heartsuit$ par 4 et de refaire le raisonnement !

On considère l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4\}$.
- L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
- Les 4 parties à 1 élément sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$;
- Les 6 parties à 2 éléments sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$;
- Les 4 parties à 3 éléments sont $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$;
- L'unique partie à 4 éléments est S ;

ce qui nous fait un total de 16 parties.

Correction de l'exercice 2.

On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3.

- On suppose naturellement que $a > 0$.
- Le volume d'un parallélépipéde est égal au produit de la surface de base (ici, carré de coté $2a - 2x$) par sa hauteur x. On a donc ici

$$v(x) = x(2x - 2a)^2. \tag{1}$$

  où x décrit l'intervalle $[0, a]$.
- De l'expression (1), on déduit l'expression de la dérivée $v'(x)$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 4\left((x-a)^2 + 2x(x-a)\right), \\ &= 4\left(x^2 - 2ax + a^2 + 2x^2 - 2ax\right), \end{aligned}$$

  et donc

$$v'(x) = 4\left(3x^2 - 4ax + a^2\right) \tag{2}$$

- Ici, on cherche donc les racines de l'équation du second degré

$$3x^2 - 4ax + a^2 = 0. \tag{3}$$

  Appliquons les formules du discriminant réduit : les racines de $ax^2 + 2b'x + c = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac, \\ x &= \frac{1}{a}\left(-b' \pm \sqrt{\Delta'}\right). \end{aligned}$$

  On aurait pu aussi utiliser les formules habituelles équivalentes : les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac, \\ x &= \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{\Delta}\right). \end{aligned}$$

  On a donc, en utilisant les formules du discriminant réduit,

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2a)^2 - 3a^2, \\ &= 4a^2 - 3a^2, \end{aligned}$$

  et donc

$$\Delta = a^2 > 0. \tag{4}$$

  Ainsi, les deux racines distinctes de (3), sont données par

$$x_1 = \frac{a}{3}, \tag{5a}$$

$$x_2 = a, \tag{5b}$$

  avec

$$0 < x_1 < a = x_2. \tag{6}$$

x	0		$\frac{a}{3}$		a
signe de $v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$	0	$\nearrow$	$v_{\max}$	$\searrow$	0

Table 1. Tableau de variation de v

- D'après (6), il suffit donc d'étudier les signes de v' sur l'intervalle $[0, a]$ qui contient x_1. On sait que v' donné par (2) est négatif entre les racines x_1 et x_2 et positif à l'extérieur. En particulier, v' est positif sur $[0, a/3]$ et négatif sur $[a/3, a]$.

  On obtient donc le tableau de variation 1 pour le volume $v(x)$. On en déduit que ce volume est maximal pour x donné par x_1, c'est-à-dire par (5a). De (1), on déduit l'expression du volume maximal :

$$v_{\max} = \frac{16}{27} a^3$$

Correction de l'exercice 4.

(1) Grâce au cours, on obtient

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right),$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Cette dernière égalité est même valable à l'ordre 3 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).$$

(2) On en déduit quand x est "proche de 0" :

$$\sin(x) \approx S(x),$$
$$\cos(x) \approx C(s),$$

où

$$S(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$
$$C(s) = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

On utilise cela pour approcher les valeurs de $\cos\left(10^{-3}\right)$ et $\sin\left(10^{-3}\right)$

(3) Numériquement, on trouve :

$$
\begin{aligned}
&C(x) = 9.999995000000000 \times 10^{-1},\\
&\cos x = 9.999995000000417 \times 10^{-1},\\
&|\cos x - C(x)| = 4.1633 \times 10^{-14},\\
&S(x) = 9.999998333333334 \times 10^{-4},\\
&\sin x = 9.999998333333417 \times 10^{-4},\\
&|\sin x - S(x)| = 8.2399 \times 10^{-18},
\end{aligned}
$$

ce qui confirme les faibles écarts.