

**Corrigé de l'examen initial du 07  
Septembre 2021**

**Correction de l'exercice 1.**

(1) On considère l'ensemble  $S = \{\clubsuit, \diamond, \spadesuit\}$ .

- L'unique parties à 0 élément est  $\emptyset$ ;
  - Les 3 parties à 1 élément sont  $\{\clubsuit\}$ ,  $\{\diamond\}$  et  $\{\spadesuit\}$ ;
  - Les 3 parties à 2 éléments sont  $\{\clubsuit, \diamond\}$ ,  $\{\clubsuit, \spadesuit\}$  et  $\{\diamond, \spadesuit\}$ ;
  - L'unique partie à 3 éléments est  $S$ ;
- ce qui nous fait un total de 8 parties.

Pour l'écriture, c'est plus simple de remplacer  $\clubsuit$  par 1,  $\diamond$  par 2,  $\spadesuit$  par 3 et de refaire le raisonnement !

On considère l'ensemble  $S = \{1, 2, 3\}$ .

- L'unique parties à 0 élément est  $\emptyset$ ;
  - Les 3 parties à 1 élément sont  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  et  $\{3\}$ ;
  - Les 3 parties à 2 éléments sont  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$  et  $\{2, 3\}$ ;
  - L'unique partie à 3 éléments est  $S$ ;
- ce qui nous fait un total de 8 parties.

(2) On considère l'ensemble  $S = \{\clubsuit, \diamond, \spadesuit, \heartsuit\}$ .

- L'unique parties à 0 élément est  $\emptyset$ ;
  - Les 4 parties à 1 élément sont  $\{\clubsuit\}$ ,  $\{\diamond\}$ ,  $\{\spadesuit\}$  et  $\{\heartsuit\}$ ;
  - Les 6 parties à 2 éléments sont  $\{\clubsuit, \diamond\}$ ,  $\{\clubsuit, \spadesuit\}$ ,  $\{\clubsuit, \heartsuit\}$ ,  $\{\diamond, \spadesuit\}$ ,  $\{\diamond, \heartsuit\}$  et  $\{\spadesuit, \heartsuit\}$ ;
  - Les 4 parties à 3 éléments sont  $\{\clubsuit, \diamond, \spadesuit\}$ ,  $\{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$ ,  $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$  et  $\{\diamond, \spadesuit, \heartsuit\}$ ;
  - L'unique partie à 4 éléments est  $S$ ;
- ce qui nous fait un total de 16 parties.

Pour l'écriture, c'est plus simple de remplacer  $\clubsuit$  par 1,  $\diamond$  par 2,  $\spadesuit$  par 3,  $\heartsuit$  par 4 et de refaire le raisonnement !

On considère l'ensemble  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ .

- L'unique parties à 0 élément est  $\emptyset$ ;
  - Les 4 parties à 1 élément sont  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$  et  $\{4\}$ ;
  - Les 6 parties à 2 éléments sont  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$  et  $\{3, 4\}$ ;
  - Les 4 parties à 3 éléments sont  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$  et  $\{2, 3, 4\}$ ;
  - L'unique partie à 4 éléments est  $S$ ;
- ce qui nous fait un total de 16 parties.

**Correction de l'exercice 2.**

(1) Sous forme de patate, on peut raisonner ainsi :

On renvoie à la figure 1 où chacune des situations est présentée :

- (a) Pour la figure 1(a), un des éléments de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent et l'autre en a deux donc l'application est ni surjective ni injective ;
- (b) Pour la figure 1(b), un des éléments de l'ensemble d'arrivée n'a pas d'antécédent et l'autre en a un seul donc l'application est non surjective et injective ;

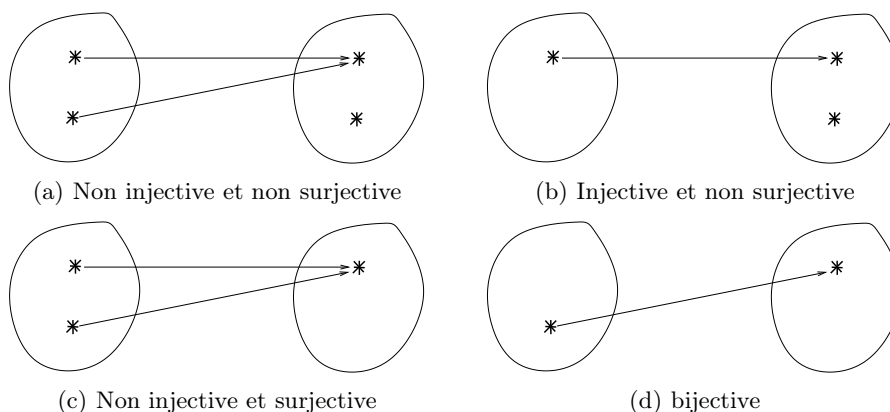


FIGURE 1. Quatre exemples différents d'applications.

- (c) Pour la figure 1(c), l'unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents donc l'application est non injective et surjective ;
- (d) Pour la figure 1(d), les deux ensemble ont un seul élément et donc le seul élément de l'ensemble de départ a un unique élément dans l'ensemble d'arrivée. l'application est donc bien bijective.

On peut montrer que ces quatre situations correspondent aux situations optimales, utilisant des ensemble de cardinaux les plus faibles.

- (2) Sous forme analytique, on peut raisonner ainsi :

Soit  $f : \begin{cases} X \rightarrow Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ . On pose, pour tout  $x \in X$ ,  $f(x) = x^2$  et on donne différents cas de figure :

- (a) Pour,  $X = \mathbb{R}$  et  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f$  est ni injective, ni surjective. En effet
- $f(1) = f(-1) = 1$  donc 1 et  $-1$ , distincts, ont la même image.
  - $f$  n'est pas surjective, car  $-1$  n'est pas atteint par  $f$ , puisqu'il n'existe aucun réel de carré égal à  $-1$ . On peut aussi remarquer, en utilisant le lemme 2.12, que

$$f(X) = \mathbb{R}_+,$$

et donc

$$f(X) \neq Y.$$

- (b) Pour,  $X = \mathbb{R}_+$  et  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f$  est injective, non surjective.

En effet

- si  $f(x) = f(y)$ , alors  $x^2 = y^2$  et donc

$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

et donc  $x = \pm y$ . Puisque  $x$  et  $y$  sont tous les deux positifs, alors ils ne peuvent qu'être égaux.

- Comme pour le cas 2a, on conclut que  $f$  n'est pas surjective.

- (c) Pour,  $X = \mathbb{R}$  et  $Y = \mathbb{R}_+$ ,  $f$  est non injective, surjective.

En effet

- Comme pour le cas 2a, on conclut que  $f$  n'est pas injective.
- Tout nombre réel positif est le carré de sa racine carré<sup>1</sup>. Donc  $f$  est surjective. On peut aussi remarquer, en utilisant le lemme 2.12, que

$$f(X) = \mathbb{R}_+,$$

1. C'est même la définition de la racine! Voir (1).

et donc

$$f(X) = Y.$$

(d) Pour,  $X = \mathbb{R}_+$  et  $Y = \mathbb{R}_+$ ,  $f$  est injective, surjective, donc bijective.

En effet

- $f$  est injective, comme dans le cas 2b.
- $f$  est surjective, comme dans le cas 2c.

On a donc la définition de la racine carrée :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \exists! x \in \mathbb{R}_+, \quad y = x^2. \quad (1a)$$

On pose alors

$$\sqrt{y} = x. \quad (1b)$$

◇

### Correction de l'exercice 3.

On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 4.

$f$  est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - x.$$

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 1,$$

strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et strictement négative sur  $\mathbb{R}_-^*$ .  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ . On a  $f(0) = 1$ ,  $f(+\infty) = \infty$  et  $f(-\infty) = -\infty$ .

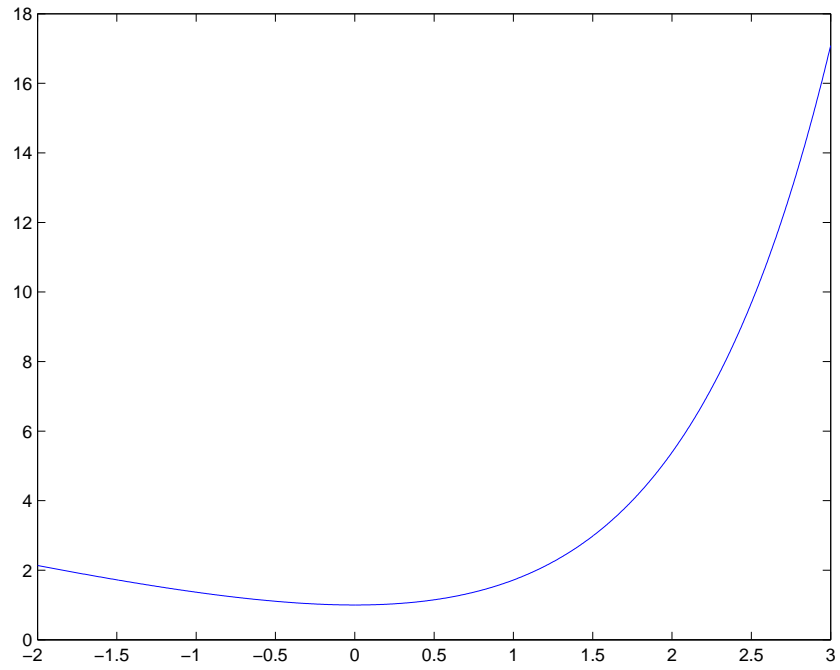
Le graphique de  $f$  est représenté sur la figure 2 page suivante.

### Correction de l'exercice 5.

On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante

[http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers\\_matlab/developpement\\_limite.m](http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m),

$$f(x) = x^2 + 1 + o(x^3).$$

FIGURE 2. Le graphe de  $f$ .