Informatique 3A MFIappro — Automne 2016

Corrigé de l'examen à mi-parcours du 11 Octobre 2016

Correction de l'exercice 1.
On trouve respectivement en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

(1)
$$f(x) = -1/4\,x^4 + 1/3\,x^3 - 1/2\,x^2 + x + o\left(x^4\right),$$

(2)
$$g(x) = -1/2\,x^2 + o\left(x^2\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) On a, pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$
et donc f' est strictement négative sur $]1,\infty[$ et strictement positive sur $]0,1[$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1,\infty[$ et strictement croissante sur $]0,1]$. Les limites de f en 0^+ et $+\infty$ valent $-\infty$. Enfin, $f(1) = 0$. Tout cela permet de dresser le tableau de variation de f.

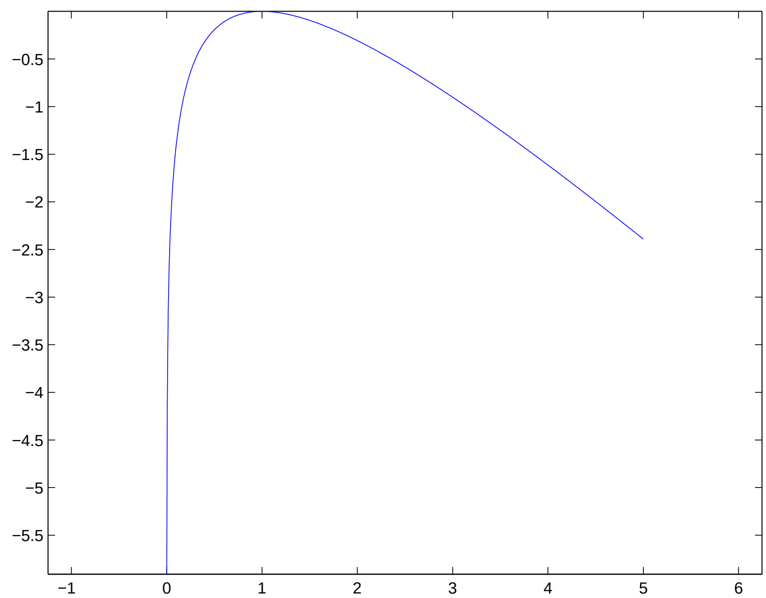

Figure 1. La courbe de f.

Voir le graphique 1.

(2) (a)

Voir le graphique 2.

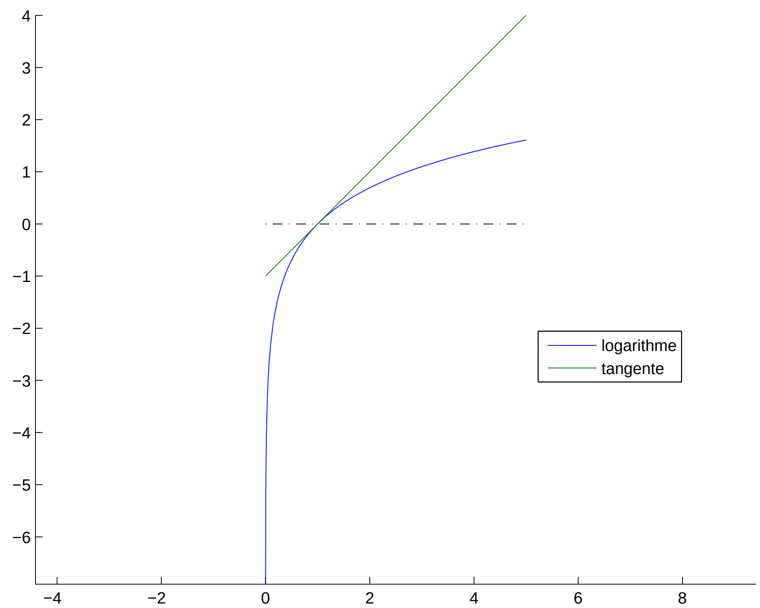

FIGURE 2. La courbe du logarithme et sa tangente au point $x = 1$.

(b) On a $\ln'(1) = 1$ et d'après l'équation (1.8) du cours, la tangente a pour équation $y = x - 1$.

(c) Le maximum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est nul et donc f est négative sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui signifie, que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ et donc que la courbe representatrice du logarithme est sous la tangente.

Correction de l'exercice 3.

(1) On obtient

$$I = -2/3\ \ln(2) + 1/3\ \ln\left(3 + e^{-1}\right) + 1/3.$$

En effet, on fait le changement de variable $u = e^x$; d'où $du = e^x dx$ et donc $dx = du/u$ et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{3 + e^{-x}} dx &= \int_1^{e^1} \frac{1}{3 + 1/u} \frac{du}{u}, \\
&= \int_1^e \frac{1}{3u + 1} du, \\
&= \frac{1}{3} \left(\ln(3e + 1) - \ln(4)\right), \\
&= \frac{\ln(3e + 1)}{3} - \frac{\ln(4)}{3}, \\
&= \frac{1}{3} + \frac{\ln(3 + e^{-1})}{3} - \frac{\ln(4)}{3},
\end{aligned}$$

(2) (a) On écrit que

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+1}dx &= \int_0^2 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx,\\ &= \int_0^2 \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int_0^2 \frac{1}{x^2+1}dx,\\ &= \int_0^2 1dx - \int_0^2 \frac{1}{x^2+1}dx,\end{aligned}$$

et puisque la primitive de la fonction $1/(1+x^2)$ vaut $\arctan x$:

$$= 2 - \arctan 2.$$

On a donc bien

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+1}dx = 2 - \arctan 2. \tag{1}$$

(b) On pose $v' = x$ et $u = \arctan x$ et par intégration par partie, il vient donc

$$\int_0^2 x \arctan x \, dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^2}dx + [x \arctan x]_{x=0}^{x=2},$$

et d'après (1) :

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2}\left(2 - \arctan 2\right) + 2\arctan 2,\\ &= -1 + \frac{1}{2}\arctan 2 + 2\arctan 2,\\ &= -1 + \frac{5}{2}\arctan 2.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$I = 5/2 \arctan(2) - 1.$$