

Contrôle Continu du 29 Septembre 2025
--

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*

Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Durée : 15 minutes.

Voir sujet de QCM n° 3 distribué.

Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM.

Exercice 2.

Former le développement limité en zéro de la fonction $f(x) = e^{(x^2)}$ à l'ordre 3.

Exercice 3.

Un crocodile a repéré une proie située à 20 mètres de lui sur la berge opposée d'une rivière, de largeur 6 m. Le crocodile se déplace à une vitesse différente sur terre ($10/4$ m/s) et dans l'eau ($10/5$ m/s). Le crocodile atteint le zèbre en passant par un certain point P , placé à x mètres du point de départ sur l'autre rive (voir figure 1).

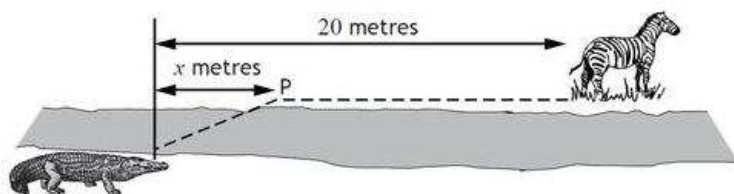


FIGURE 1. Le crocodile et sa proie.

- (1) Déterminer le temps $T(x)$ (en dixièmes de secondes) mis par le crocodile pour atteindre sa cible.

- (2) Trouver $x \in [0, 20]$ qui minimise ce temps. On pourra montrer que l'étude complète d'une fonction est en fait inutile et qu'il suffit de trouver un minimum de trois valeurs.

- (3) *Question facultative*

Sauriez-vous formuler ce problème comme un problème d'optique géométrique ?

Exercice 4.

On cherche dans cet exercice à retrouver la valeur de l'aire S d'un disque D de centre O et de rayon R .

- (1)

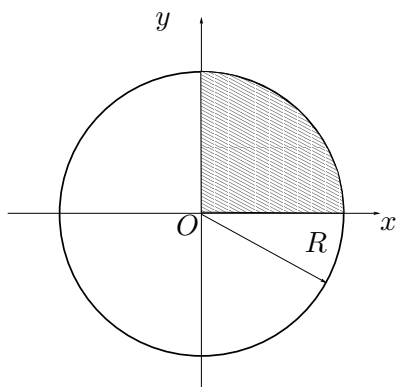


FIGURE 2. Un quart de cercle.

On décompose le disque D en 4 quarts de disque, comme le montre la figure 2.

- (a) Montrer que l'aire du quart de disque en haut à droite de cette figure peut être interprétée comme l'aire sous la courbe de la fonction f donnée par

$$\forall x \in [0, R], \quad f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (1)$$

- (b) En déduire la valeur de l'aire S du disque de rayon R donnée par

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx. \quad (2)$$

- (2)

On décompose maintenant le disque D en couronnes élémentaires chacune d'elles étant comprise entre les rayons r et $r + dr$ où $r \in [0, R]$, comme le montre la figure 3(a) page ci-contre.

- (a) Quelle est la surface $dS(r)$ de cette couronne ?

- (b) En déduire S donnée par

$$S = \int_0^R dS(r). \quad (3)$$

- (3)

On décompose enfin le disque D en portions de disques élémentaires chacune d'elles étant comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$ comme le montre la figure 3(b) page suivante.

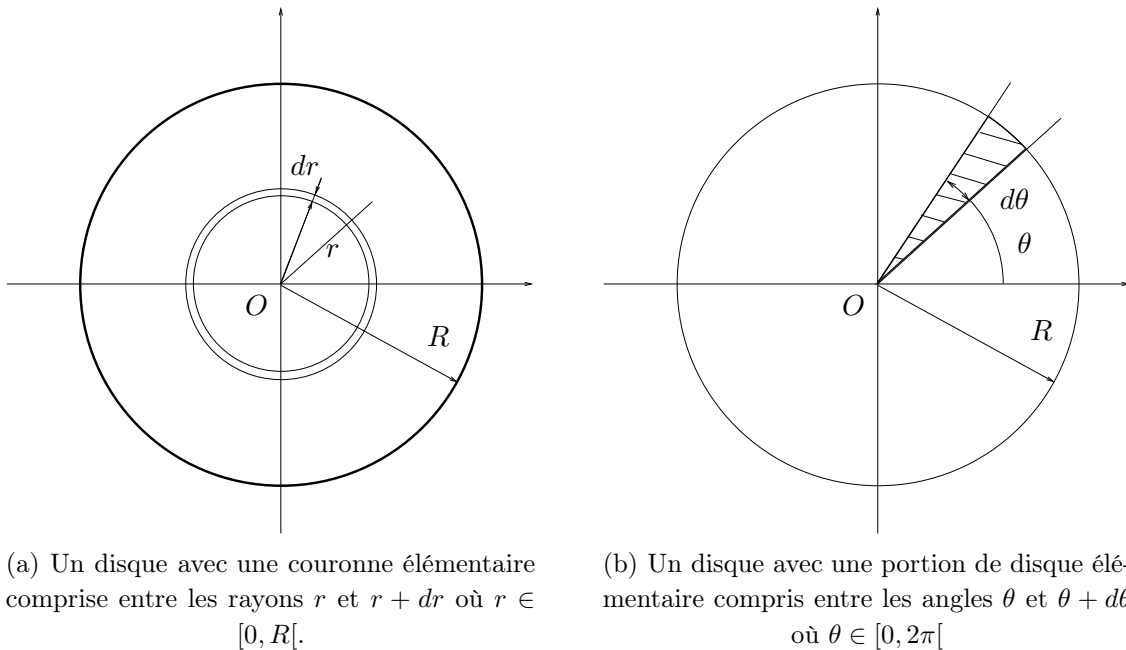


FIGURE 3. Un disque de rayon R décomposé de deux façons différentes.

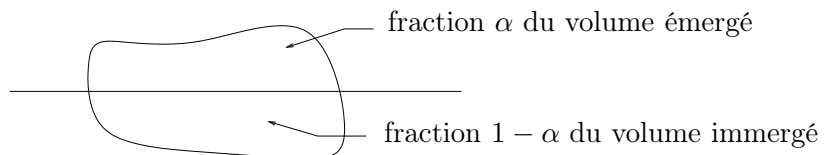
- (a) Quelle est la surface $dS(\theta)$ la portion de disque élémentaire compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$? On pourra montrer que pour $d\theta$ petit, cette surface est celle d'un triangle.
- (b) En déduire S donnée par

$$S = \int_0^{2\pi} dS(\theta). \quad (4)$$

- (4) Certains de ces trois calculs s'appuient en fait sur la valeur du périmètre d'un cercle. Lesquels?

Exercice 5.

gaz de masse volumique μ_g



Liquide de masse volumique μ_0

FIGURE 4. L'équilibre de l'objet

Soit un objet de volume V et de masse volumique (pas nécessairement homogène) μ (voir figure 4). Il est immergé dans un liquide de masse volumique μ_0 , non nécessairement homogène. Ce liquide est surmonté d'un gaz de masse volumique μ_g , non nécessairement homogène. Soit $\alpha \in [0, 1]$, la fraction

du volume du solide qui est au dessus de la surface du liquide. La fraction du volume du solide en dessous de la surface du liquide est donc $1 - \alpha$.

Montrer que

$$\alpha = 1 - \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (5)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>