Matériaux 3A MFImater — Automne 2025

Corrigé du contrôle Continu du 29 Septembre 2025

Correction de l'exercice 1.
Voir correction du QCM n° 3 en date du 29 Septembre 2025, disponible sur Internet.

Correction de l'exercice 2.
On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = x^2 + 1 + o\left(x^3\right).$$

Correction de l'exercice 3.
Cet exerice est issu de [Bas18, l'annexe A].

(1) On écrit que le temps total est égal à la somme du temps que met que le crocodile pour franchir la rivière et du temps que met le crocodile pour finir le chemin sur la terre ferme. Chacun de ces temps est exprimé en fonction de la distance et de la vitesse en utilisant la relation habituelle :

$$v = \frac{d}{t}$$

D'après le théoroème de Pythagore la première distance est égale à $\sqrt{x^2+6^2}$, tandis que la seconde vaut $20-x$. On en déduit donc que

$$T(x) = \frac{5}{10}\sqrt{x^2+36} + \frac{4}{10}(20-x),$$

soit, en dixième de secondes,

$$T(x) = 5\sqrt{x^2+36} + 4(20-x). \tag{1}$$

(2) La fonction T présente un extrémum local sur $]0,20[$, là où sa dérivée est nulle. Or,

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{5/2\times 2x}{\sqrt{x^2+36}} - 4, \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+36}}\left(5x - 4\sqrt{x^2+36}\right), \end{aligned}$$

et donc $T'(x)$ est nulle si et seulement si

$$5x = 4\sqrt{x^2+36}.$$

Puisque $x \in]0,20[$, cela est équivalent à

$$25x^2 = 16\left(x^2+36\right)$$

soit encore

$$9x^2 - 16\times 36 = 0,$$

soit

$$x^2 = \frac{16\times 36}{9},$$

et donc

$$x = \pm \frac{4 \times 6}{3} = \pm 8.$$

On cherche $x > 0$ et donc T' ne s'annulle sur $]0, 20[$ qu'en

$$x_0 = 8. \tag{2}$$

Pour conclure, on peut procèder à l'habituelle étude de variation de T sur $[0, 20]$. Mais il est un peu plus rapide de constater que la fonction T, continue sur $[0, 20]$ y atteint ses extrémas. On sait que les extrémas locaux (dans $]0, 20[$) ne peuvent qu'être donnés par (2). En y rajoutant les valeurs aux bord, on en déduit que les extréma de T sont nécessairement dans $\{T(0), T(20), T(x_0)\}$. On détermine alors successivement

$$\begin{aligned}
T(0) &= 5\sqrt{0^2 + 36} + 4(20 - 0) = 110, \\
T(x_0) &= 5\sqrt{8^2 + 36} + 4(20 - 8) = 98, \\
T(20) &= 5\sqrt{20^2 + 36} + 4(20 - 20) \approx 104.
\end{aligned}$$

Ainsi, vu l'ordre de ces trois valeurs, T présente nécessairemment un minimum, égal à 98, en $x_0 = 8$.

Remarque 1. Si x décrit $\mathbb{R}$, l'expression (1) est encore valable à condition de remplacer la distance $20 - x$ par $|20 - x|$, de façon que cette quantité doit toujours positive pour tout x

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4|20 - x|. \tag{3}$$

On dérive de nouveau la fonction T, là où elle est dérivable, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{20\}$. Pour $x \leq 20$, on a $|20 - x| = 20 - x$ et les calculs précédents sont encore valables et donc T' ne peut s'annuler qu'en $x_0 = 8$. Pour $x \geq 20$, on a $|20 - x| = x - 20$ et donc

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4(x - 20). \tag{4}$$

Dans ce cas, les calculs sont identiques aux précédents et on a

$$T'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 36}} \left(5x + 4\sqrt{x^2 + 36}\right),$$

et T' est nulle si et seulement si

$$-5x = 4\sqrt{x^2 + 36},$$

avec $x \geq 20 > 0$, ainsi $-5x$ est négatif et cette équation ne peut avoir lieu. Bref, le seul de T' sur $\mathbb{R} \setminus \{20\}$ est donné par (2). On conclue comme précédemment, sans faire d'étude fastidieuse de tableau de variation. Les extréma de T sont nécessairement dans $\{\lim_{x \to \pm\infty} T(x), T(20), T(x_0)\}$ donné par

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \pm\infty} T(x) = +\infty, \\
&T(x_0) = 98, \\
&T(20) \approx 104
\end{aligned}$$

On conclue comme précédémment. Le minimum obtenu est donc global sur $\mathbb{R}$.

(3) Ce problème peut se voir comme un problème d'optique géométrique ; en effet, la lumière se déplace avec une vitesse différente selon l'indice du milieu dans lequel elle se propage.

Montrons qu'on peut le traiter de la sorte. On se rèfere à la figure 1. Le temps mis par le crocodile est égal à

$$T = t_1 + t_2 = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2},$$

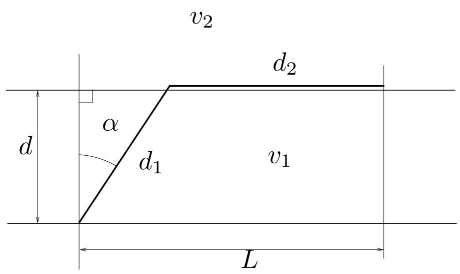

FIGURE 1. Le problème du crocodile traité de façon optique géométrique.

où v_1 est la vitesse dans la rivière et v_2 sur terre. Au lieu de paramètrer par le déplaement x, on choisit l'angle α comme le montre la figure 1. Pusique l'on a $\cos\alpha = d/d_1$, il vient $d_1 = d/\cos\alpha$. De même, on a $\tan\alpha = (L - d_2)/d$ et donc $d_2 = l - d\tan\alpha$ et ainsi, il vient

$$T = \frac{d}{v_1\cos\alpha} + \frac{L - d\tan\alpha}{v_2\cos\alpha} \tag{5}$$

On a alors

$$T'(\alpha) = \frac{d}{v_1}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{d}{v_2}\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right).$$

L'optimum annulle T' et correspond à

$$v_2\sin\alpha = v_1.$$

Cela correspond aux lois de la refraction de Descartes : un rayon lumineux va du milieu d'indice optique proportionnel à v_1 dans un milieu d'indice optique proportionnel à v_2. L'angle d'incidence est α et l'angle d'incidence de sortie, dite rasante, vaut $\pi/2$. On a donc bien la loi $n_1\sin_i = n_2\sin i_2$.

On pourrait s'amuser à utiliser cela de façon expérimentale pour déterminer la valeur de α. On envoie un rayon avec un angle, choisi pour que l'angle d'incidence de sortie soit rasante.

Correction de l'exercice 4.

(1)

(a)

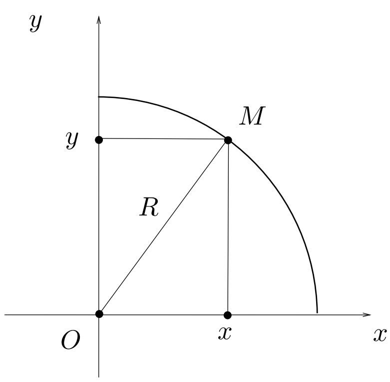

FIGURE 2. Un quart de cercle et la fonction f.

Considérons la fonction f qui a tout réel x de $[0, R]$ associe le réel $y \in [0, R]$ tel que (x, y) soient les coordonnées du point M de l'arc de cercle de centre O et de rayon R, comme le montre la figure 2 page précédente. On a d'après le théorème de Pythagore $x^2 + y^2 = R^2$ et donc, puisque y est positif,

$$y = |y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{R^2 - x^2},$$

ce qui fournit l'expression de l'équation (1) de l'énoncé. L'aire comprise sous la graphe de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = R$ est égale à

$$S' = \int_0^R f(x)dx. \tag{6}$$

(b) On a donc l'équation (2) de l'énoncé. Le calcul de cette intégrale se retrouve précisément rédigé dans l'exemple 3.4 page 24 du cours. D'après l'équation (1) de l'énoncé, (6) et l'équation (3.16) du cours, il vient

$$S = 4S' = 4 \times \frac{\pi}{4} R^2,$$

et donc le fameux

$$S = \pi R^2. \tag{7}$$

(2)

Le raisonnement infinitésimal fait dans cette question est analogue à celui qui a été fait dans l'exercice de TD 3.2.

(a) La couronne comprise entre les rayon r et $r + dr$ peut être assimilée, pour dr petit, à un rectangle de longueur égale au périmètre du cercle de centre O et de largeur dr. Ce périmètre vaut $2\pi r$. En d'autres termes, sa surface $dS(R)$ est donc égale à

$$dS(r) = 2\pi r dr. \tag{8}$$

(b) Il ne reste plus qu'à sommer toutes ces surfaces élémentaires et d'après l'équation (3) de l'énoncé et (8), on a donc

$$S = \int_0^R 2\pi r dr, \tag{9}$$

et finalement

$$S = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R},$$

ce qui redonne bien (7).

(3)

On considère enfin la décomposition du disque donnée dans la question 3 de l'énoncé.

(a)

Déterminons la surface $dS(\theta)$ la portion de disque élémentaire compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$.

(i) On pourrait écrire que $dS(\theta)$ est égale à la fraction de l'aire totale du disque πR^2 correspondant à l'angle 2π vaut, si les angles sont exprimés en radians :

$$dS(\theta) = \frac{\pi R^2}{2\pi} d\theta$$

soit encore

$$dS(\theta) = \frac{1}{2} R^2 d\theta. \tag{10}$$

Cependant, cette méthode s'appuie sur la connaissance de l'aire totale du disque, que l'on cherche justement à déterminer !

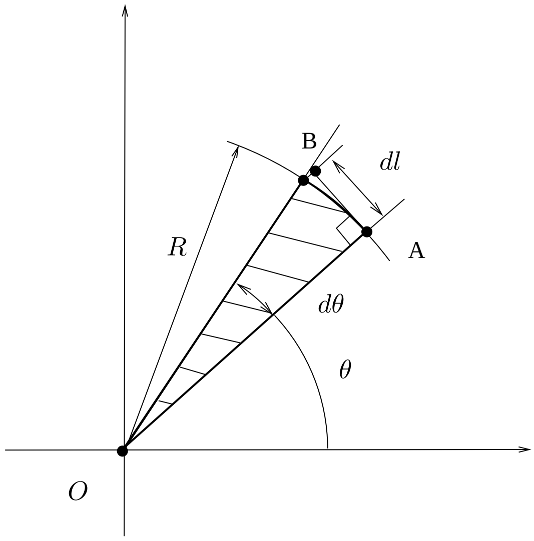

FIGURE 3. Le triangle élémentaire défini par $d\theta$ et R.

(ii) Procédons autrement. Remarquons sur la figure 3 que le triangle élémentaire de surface $dS(\theta)$ est identique, pour $d\theta$ petit, au triangle rectangle OAB de surface

$$d\widetilde{S}(\theta) = \frac{1}{2} OA\, AB,$$

soit puisque $dS(\theta) \approx d\widetilde{S}(\theta)$ et que A appartient au cercle de rayon R :

$$dS(\theta) = \frac{1}{2} R dl. \tag{11}$$

Il reste à déterminer la longueur infinitésimale dl. Plusieurs façons de procéder sont possibles.

(A) On peut écrire d'après les règles de trigonométrie dans le triangle rectangle OAB :

$$\tan(d\theta) \approx \frac{dl}{R},$$

et donc, pour $d\theta$ petit [1]

$$dl \approx R \tan(d\theta) \approx R d\theta, \tag{12}$$

et de (11), on en déduit (10).

(B) Plus fondamentalement et plus géométriquement, on peut s'appuyer sur la preuve de de la Proposition J.25 page 126, de l'annexe J, pour montrer que, dans le cas $R = 1$, (12) a bien lieu [2].

(b) Comme dans la question 2b page ci-contre, il ne reste plus qu'à sommer toutes ces surfaces élémentaires et d'après l'équation (4) de l'énoncé et (10), on a donc

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta, \tag{13}$$

1. ce qui s'appuie sur le développement limité de la tangente à l'ordre 1 en zéro :

$$\tan(d\theta) = d\theta + o(d\theta) \approx d\theta.$$

2. Malheureusement, un peu de réflexion nous montre que ce raisonnement s'appuie en fait sur (10) !

et donc

$$S = \frac{1}{2}R^2 \int_0^{2\pi} d\theta,$$
$$= \frac{1}{2}R^2 \times 2\pi,$$

ce qui redonne bien (7).

(4) On a rencontré et utilisé le fait que le périmètre d'un cercle valait $2\pi R$ au point 2a page 4 donc pour la méthode de la question 2 et à la question 3a page 4 donc pour la méthode de la question 3. Ainsi, la seule méthode, la moins jolie, qui évite un raisonnement circulaire est celle de la méthode 1. Si on y réfléchit bien, cette méthode, fondée sur un changement de variable, s'appuie en fait sur les dérivées des fonctions sin et cos, donc sur les résulats de la Proposition J.25 page 126 de l'annexe J et qui s'appuie en fait là encore sur (10), ce qui boucle la boucle du raisonnement circulaire !

Remarque 2. Il suffit en fait de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires pour donner un sens aux deux équations (9) et (13). En effet, on se donne f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et on calcule de deux façons différentes l'intégrale double (voir par exemple [Bas11, Chapitre "Intégrales multiples", section "Intégrales doubles"] disponible sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31_A04.pdf`)

$$I = \iint_{(x,y)\in D} f(x,y)dxdy$$

et de la calculer en polaire, en faisant un changement de variable :

$$I = \iint_{(r,\theta)\in \widetilde{D}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dxdy$$

en écrivant de façon informelle que

$$dxdy = rdrd\theta.$$

Plus de détails dans les sections "Théorèmes de Fubini" p. 57, "Calculs de Surface" p. 60 et "Changements de variables" p. 60 de [Bas11]).

Correction de l'exercice 5.

On montre, en écrivant l'équibre statique, en prenant en compte le poids et la poussé d'Archimède que :

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 - \mu_g}.$$

On peut vérifier que l'hypothèse $\mu_g < \mu \leq \mu_0$ entraîne que α est compris entre 0 et 1. Si on suppose μ_g négligeable devant μ_0, ce qui est usuellement le cas, alors,

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0},$$

et on obtient donc l'équation (5) de l'énoncé. Puisque $\alpha \in [0,1]$, on a donc nécessairement

$$\mu \leq \mu_0,$$

ce qui permet au corps de flotter.

On renvoie pour plus de détails à l'exemple 8.14 page 71 du chapitre 8 du cours.

Références

[Bas11] J. Bastien. *Mathématiques : Applications.* Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT31. 2011. 158 pages.

[Bas18] J. Bastien. *Biomécanique du mouvement.* Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca. 2018. 190 pages.