

QCM (maison) pour le 1^{er} octobre 2024

Important :

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécessaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

HAUNIME Anne

Chapitre 2, section 2.1

Question 1 Si une fonction est dérivable en a , on a alors

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + o(b - a).$$

C'est vrai C'est faux

Question 2 ♣ Pour $\alpha \in]0, 1[$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur

\mathbb{R}_+^* \mathbb{R} \mathbb{R}_+ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 3 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a , non identiquement nulle sur $]0, a[$.

Alors

- elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
 - elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
 - elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
 - elle admet un maximum strictement positif sur $]0, a[$.
- elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
 - elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
 - elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
 - Aucune de ces réponses n'est correcte.

Chapitre 2, section 2.2

Question 4 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

admet un développement limité à l'ordre 6 admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.

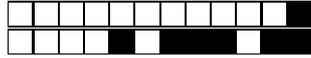
Question 5 La fonction $f : x \mapsto (\ln(1 + x))^2$ admet à l'ordre 4, en zéro le développement limité suivant

$$x^2 - x^3 + o(x^3) \tag{1}$$

$$\frac{1}{x^2} - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) \tag{2}$$

$$1 + x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) \tag{3}$$

$$x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) \tag{4}$$



Question 6 La fonction $f : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

$$x^5 + o(x^6) \quad (1)$$

$$x^6 + o(x^6) \quad (2)$$

Chapitre 3, section 3.2

Question 7 ♣ Posons

$$I = \int_0^{1/3\pi} \tan(x) dx.$$

On a

$$I = -1. \quad (1)$$

$$I = 2 \tan(1/3\pi). \quad (2)$$

$$I = 4 \tan(1/3\pi). \quad (3)$$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 8 Posons

$$I = \int_0^e \ln(x) dx.$$

On peut affirmer que

$$I = 0. \quad (1)$$

$$I \text{ n'est pas définie parce que l'intégrande n'est pas continue sur } [0, e]. \quad (2)$$

$$I = -\infty \text{ parce que l'intégrande tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers zéro.} \quad (3)$$

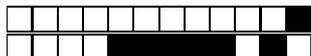
Question 9 ♣ La formule du changement de variable pour les intégrales s'écrit

$$\int_a^b f(u) du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x)) \phi'(x) dx. \quad (1)$$

$$\int_a^b f(u) du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x)) \frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \quad (2)$$

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \phi'(x) dx. \quad (3)$$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 10 ♣**

Reprenons l'exemple 3.4 page 18 du cours :

Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose

$$u = R \cos x,$$

c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par

$$\phi(x) = R \cos x, \tag{1}$$

L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x . Procédons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x}$. On a donc successivement

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} &= \sqrt{R^2 (1 - \cos^2 x)}, \\ &= \sqrt{R^2} \sqrt{1 - \cos^2 x}, \\ &= \sqrt{R^2} \sqrt{\sin^2 x}, \\ &= |R| |\sin x|, \end{aligned}$$

et puisque $R \geq 0$

$$= R |\sin x|.$$

2. Choisissons *une* valeur de α telle que $0 = R \cos(\alpha)$. Choisissons ^a

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Choisissons *une* valeur de α telle que $R = R \cos(\alpha)$. Choisissons

$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$

3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R \sin x$, et donc $du = -R \sin x dx$. Ainsi,

on remplace du par $-R \sin x dx$.

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :

$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R |\sin x| (-R \sin x) dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x| \sin x dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= -R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) dx, \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x) dx, \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{\pi/2}^{2\pi}. \end{aligned}$$

Et donc, on a

$$I_R = -\frac{3\pi}{4} R^2. \tag{4}$$

Ce raisonnement est faux parce que $\phi : x \mapsto R \cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.

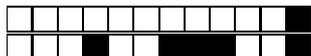
Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.2.4.1 page 18 du cours est fausse.

Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.

Ce raisonnement est vrai.

Aucune de ces réponses n'est correcte.

a. On pourra prendre tout autre valeur !



Question 11 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^3 e^{-x} dx$$

On a

$$I = 6 - 16 e^{-1}$$

$$I = 36 - 96 e^{-1}$$

$$I = 11 - 48 e^{-1}$$

Question 12 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$

On a

$$I = 5040 - 13700 e^{-1}$$

$$I = 30240 - 82200 e^{-1}$$

$$I = 15113 - 41100 e^{-1}$$

Généralités

Question 13 ♣ On suppose que l'on a montré l'assertion

$$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \implies \mathcal{C},$$

où \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont trois propriétés. Alors, la propriété \mathcal{C} est vraie si

la propriété \mathcal{A} est vraie

la propriété \mathcal{B} est vraie

les propriétés \mathcal{A} et \mathcal{B} sont vraies

Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 14 ♣ On suppose que l'on a montré l'implication

$$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B} \implies \mathcal{C},$$

où \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont trois propriétés. Alors, la propriété \mathcal{C} est vraie si

la propriété \mathcal{A} est vraie

la propriété \mathcal{B} est vraie

les propriétés \mathcal{A} et \mathcal{B} sont vraies

Aucune de ces réponses n'est correcte.