POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Matériaux 3A MFImater

Automne 2024

# QCM (maison) pour le 1er octobre 2024

**Important :**
**Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.**

**Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.**

**Corrigé**

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

## Chapitre 2, section 2.1

**Question 1** Si une fonction est dérivable en $a$, on a alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + o(b-a).$$

☐ C'est vrai ☐ C'est faux

**Question 2 ♣** Pour $\alpha \in ]0,1[$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur

☐ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R}_+$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 3 ♣** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0,a]$, nulle en 0 et en $a$, non identiquement nulle sur $]0,a[$.
Alors

- ☐ elle admet un maximum positif sur $[0,a]$.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0,a]$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $]0,a[$.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $]0,a[$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $[0,a]$, atteint en un unique point.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0,a]$, atteint en un unique point.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $]0,a[$, atteint en un unique point.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

## Chapitre 2, section 2.2

**Question 4** Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point $x_0$

☐ admet un développement limité à l'ordre 6 ☐ admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.

**Question 5** La fonction $f : x \mapsto (\ln(1+x))^2$ admet à l'ordre 4, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \tag{1}$$

☐
$$\frac{1}{x^2} - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{2}$$

☐
$$1 + x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{3}$$

☐
$$x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \tag{4}$$

**Question 6** La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$

☐
$$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

## Chapitre 3, section 3.2

**Question 7 ♣** Posons

$$I = \int_0^{1/3\,\pi} \tan\left(x\right) dx.$$

On a

☐
$$I = -1. \tag{1}$$

☐
$$I = 2\tan\left(1/3\,\pi\right). \tag{2}$$

☐
$$I = 4\tan\left(1/3\,\pi\right). \tag{3}$$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 8** Posons

$$I = \int_0^{e} \ln\left(x\right) dx.$$

On peut affirmer que

☐
$$I = 0. \tag{1}$$

☐
$$I \text{ n'est pas définie parce que l'intégrande n'est pas continue sur } [0, e]. \tag{2}$$

☐
$$I = -\infty \text{ parce que l'intégrande tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers zéro.} \tag{3}$$

**Question 9 ♣** La formule du changement de variable pour les intégrales s'écrit

☐
$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{1}$$

☐
$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{2}$$

☐
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx. \tag{3}$$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 10 ♣**
Reprenons l'exemple 3.4 page 18 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale
$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$
On pose
$$u = R\cos x,$$
c'est-à-dire, on que l'on choisit $\phi$ définie par
$$\phi(x) = R\cos x, \tag{1}$$
L'"ancienne variable" est $u$ et la "nouvelle" est $x$. Procèdons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x}$. On a donc successivement
$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x} &= \sqrt{R^2\left(1-\cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{(1-\cos^2 x)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R|\,|\sin x|\,,\end{aligned}$$
et puisque $R \geq 0$
$$= R\,|\sin x|\,.$$
2. Chosissons *une* valeur de $\alpha$ telle que $0 = R\cos(\alpha)$. Choisissons [a]
$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$
Chosissons *une* valeur de $\alpha$ telle que $R = R\cos(\alpha)$. Choisissons
$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$
3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R\sin x$, et donc $du = -R\sin x dx$. Ainsi,
$$\text{on remplace } du \text{ par } -R\sin dx.$$

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :
$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R\,|\sin x|\,(-R\sin x)\,dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x|\sin x dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin^2 x dx.$$
On linéarise le sinus sous la forme :
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big).$$
On a donc
$$\begin{aligned}I &= -R^2\int_{\pi/2}^{2\pi}\frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\int_{\pi/2}^{2\pi} 1-\cos(2x)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$
Et donc, on a
$$I_R = -\frac{3\pi}{4}R^2. \tag{4}$$

- ☐ Ce raisonnement est faux parce que $\phi\ : x \mapsto R\cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.2.4.1 page 18 du cours est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.
- ☐ Ce raisonnement est vrai.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

a. On pourra prendre tout autre valeur !

**Question 11** Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^3 e^{-x} dx$$

On a

☐ $I = 6 - 16\,e^{-1}$ ☐ $I = 36 - 96\,e^{-1}$ ☐ $I = 11 - 48\,e^{-1}$

**Question 12** Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$

On a

☐ $I = 5040 - 13700\,e^{-1}$ ☐ $I = 30240 - 82200\,e^{-1}$ ☐ $I = 15113 - 41100\,e^{-1}$

## Généralités

**Question 13 ♣** On suppose que l'on a montré l'assertion

$$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

☐ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
☐ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
☐ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 14 ♣** On suppose que l'on a montré l'implication

$$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

☐ la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
☐ la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
☐ les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*