Matériaux 3A MFImater

Automne 2025

QCM (maison) pour le 25 septembre 2025

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 2, section 2.1

Question 1 Si une fonction est dérivable en x_0, elle est alors

☐ discontinue en x_0 ☒ continue en x_0

Explication ***:*** Voir section 2.1.1 du cours. En effet, on a

$$f(b) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (b - a),$$

et si f est dérivable, alors d'après (2.3), on a à la limite $b \to a$:

$$\lim_{\substack{b \to a \\ b \neq a}} f(b) - f(a) = 0.$$

Question 2 La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$.

☒ C'est vrai ☐ C'est faux

Explication ***:*** Voir par exemple la formule (2.16) du cours avec $f(x) = x$ ou l'annexe B.

Question 3 ♣ La fonction $f\ : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur

☒ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R}_+$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication ***:*** La fonction f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$. Voir par exemple la formule (2.16) du cours avec $f(x) = x$ ou l'annexe B. En zéro, cette fonction a une pente infinie et n'y est donc pas dérivable. Pour démontrer cela, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty. \tag{1}$$

On peut aussi écrire

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty,$$

ce qui implique aussi (1).

Question 4 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a,
Alors

- ■ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction atteint ses bornes sur $[0, a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0, a]$ qui positif puisque f est positive. Son maximum n'est pas nécessairement atteint en $]0, a[$ et n'est pas nécessairement strictement positif (si par exemple la fonction est nulle $[0, a]$). Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point (penser par exemple à la fonction $\cos^2(x)$ sur $[0, 14\pi + \pi/2]$ qui atteint son maximum 1, en tous les multiples de π). On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif sur $[0, a]$", les autres réponses étant fausses.

Question 5 ♣ Soit une fonction est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et avec une limite nulle en $+\infty$, non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors

- ■ elle admet un maximum positif sur $\mathbb{R}_+$.
- ■ elle admet un maximum strictement positif sur $\mathbb{R}_+$.
- ■ elle admet un maximum positif sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ■ elle admet un maximum strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $\mathbb{R}_+$, atteint en un unique point.
- ☐ elle admet un maximum strictement positif sur $\mathbb{R}_+$, atteint en un unique point.
- ☐ elle admet un maximum positif sur $\mathbb{R}_+^*$, atteint en un unique point.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour tout réel $a > 0$, la fonction atteint ses bornes sur $[0, a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0, a]$ qui positif puisque f est positive. Puisque f a une limite nulle en $+\infty$, on peut en déduire que cela implique f admet un maximum sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction étant non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce maximum est nécessairement strictement positif. Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point. On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif ou strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_+$", les autres réponses étant fausses. Notons que ce raisonnement avait été utilisé dans la correction de l'exercice de TD 2.6.

Question 6 ♣ Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère l'assertion suivante

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left(a \neq b \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) \right). \tag{1}$$

- ■ Si (1) est vraie alors f est affine.
- ■ Si f est affine alors (1) est vraie.
- ■ Si f est constante alors (1) est vraie.
- ■ Si $f(x) = 2x + 3$ alors (1) est vraie.
- □ Si $f(x) = 2x^2 + 3$ alors (1) est vraie.
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Rappelons le résultat suivant :
Montrer que toutes les fonctions f définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left(a \neq b \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) \right), \tag{2}$$

sont les fonctions affines.
La démonstration en est la suivante :
Il suffit de raisonner par analyse/synthèse, ce qui revient à montrer condition nécessaire/suffisante ou encore unicité/existence.

1. Supposons que (2) ait lieu. Soit f définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Fixons $a \in \mathbb{R}$. D'après (2), pour tout b différent de a, on a
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a),$$
ce qui implique
$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a),$$
et donc
$$f(b) = f'(a)(b-a) + f(a),$$
soit encore, en posant $\alpha = f'(a)$ et $\beta = f(a) - af'(a)$,
$$\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad f(b) = \alpha b + \beta. \tag{3}$$
Notons que α et β dépendent de a mais sont bien sûr indépendants de b. (3) est vraie pour tout b différent de a mais, f est supposée dérivable, elle est donc continue, et par continuité, quand b tend vers a, (3) est aussi vraie en a. On a donc
$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad f(b) = \alpha b + \beta. \tag{4}$$
ce qui est équivalent à f est affine.
2. Évidemment, dans l'autre sens, cela est immédiat. Si f est affine (4), implique *a fortiori* pour tout b différent de a $(f(b) - f(a))/(b-a) = \alpha$ et $f'(a) = \alpha$, ce qui implique (2) .

Ainsi (1) est équivalent à f affine, ce dont découlent les différentes réponses.

Question 7 Peut-on modifier l'égalité suivante pour qu'elle soit valable pour toute fonction f, définie sur $\mathbb{R}$: soit $a \in \mathbb{R}$: on dit que f est dérivable en a ssi

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left(a \neq b \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) \right)?$$

■ oui. □ non.

Explication : Il suffit de rajouter à droite le terme $\varepsilon(b)$ dont on impose une limite nulle quand b tend vers a, comme le montre l'équation (2.10) du cours.

Question 8 Un étudiant zélé tient le raisonnement suivant : "On considère f une fonction dérivable en a. D'après l'équation (2.11a) du cours, on a

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)\varepsilon(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \eta(b)$$

où $\eta(b) = (b-a)\varepsilon(b)$ qui tend vers 0 si b tend vers a d'après l'équation (2.11b), du cours. Ainsi, on peut dire que f est dérivable en b ssi

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \eta(b), \tag{1a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \eta(b) = 0, \tag{1b}$$

ce qui se substitue à l'équation (2.11) du cours." Ce raisonnement est correct.

■ non. ☐ oui.

Explication : Ce raisonnement n'est pas correct pour deux raisons.

1. Tout d'abord (1) ne permet pas de caractériser la valeur $f'(a)$ de la dérivée. Supposons en effet que l'on ait

$$f(b) = f(a) + (b-a)K + \eta(b), \tag{2a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \eta(b) = 0, \tag{2b}$$

où K est un réel donné égal à $f'(a)$. Prenons un autre réel $\widetilde{K}$ et posons

$$\widetilde{\eta}(b) = \eta(b) + (b-a)\left(K - \widetilde{K}\right),$$

qui tend vers 0 quand b tend vers a, selon (2b). Selon (2a), on a donc

$$f(b) = f(a) + (b-a)\widetilde{K} + \widetilde{\eta}(b), \tag{3a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \widetilde{\eta}(b) = 0, \tag{3b}$$

et donc la dérivée de f en a serait aussi égale à $\widetilde{K}$ et n'est donc nullement fixée.
Autrement dit l'équation (2.11) du cours assure l'unicité de la valeur de la dérivée de f en a, comme le montre le raisonnement suivant. Alors que (1) n'assure pas cette unicité. Supposons qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$f(b) = f(a) + (b-a)K_1 + (b-a)\varepsilon_1(b), \tag{4a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \varepsilon_1(b) = 0, \tag{4b}$$

et

$$f(b) = f(a) + (b-a)K_2 + (b-a)\varepsilon_2(b), \tag{5a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \varepsilon_2(b) = 0. \tag{5b}$$

Par différence entre (4a) et (5a), il vient

$$(b-a)(K_1 - K_2) + (b-a)(\varepsilon_1(b) - \varepsilon_2(b)) = 0$$

et par division par $(b-a)$ (pour $b \neq a$) :

$$K_1 - K_2 + \varepsilon_1(b) - \varepsilon_2(b) = 0,$$

et à la limite quand b tend vers a, d'après (4b)-(5b), il vient $K_1 = K_2$.

2. En outre, on peut aussi remarquer que, en posant $\widetilde{\eta}(b) = (b-a)f'(a) + \eta(b)$, (1) est équivalent à

$$f(b) = f(a) + \widetilde{\eta}(b), \tag{6a}$$
$$\text{avec } \lim_{b\to a} \widetilde{\eta}(b) = 0, \tag{6b}$$

ce qui n'est rien d'autre que la continuité et non la dérivabilité de f en a !

Chapitre 2, section 2.2

Question 9 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

☐ admet un développement limité à l'ordre 6

☒ admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.

Explication : Qui peut le plus peut le moins. On peut tronquer un développement limité puisque $o((x-x_0)^3 = o((x-x_0)^5$. Mais, dans l'autre sens, le terme $o((x-x_0)^5$ "bloque" le développement limité à l'ordre 5 et on ne peut obtenir le terme en $(x-x_0)^6$ du développement limité. Voir section 2.2.1 du cours.

Question 10 La fonction $f\ : x \mapsto \sin(\tan x)$ admet à l'ordre 7, en zéro le développement limité suivant

☒
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{1}$$

☐
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{2}$$

☐
$$x + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{3}$$

Explication : La fonction f est impaire : son dévelopement limité ne contient que des termes associés à des puisssances impaires. Ainsi, on pouvait sans calcul et d'emblée éliminer la réponse (2) qui contenait un terme associé à une puisssance paire. Par ailleurs, la réponse (3) contient un terme $\frac{1}{6x^3}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. La seule bonne réponse possible (1) venait de la [Bas22a, correction de l'exercice de TD 1.23]

Question 11 La fonction $f\ : x \mapsto \exp(\sin x)$ admet à l'ordre 3, en zéro le développement limité suivant

☐
$$1 + x + o(x) \tag{1}$$

☐
$$1 + \frac{1}{x}x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \tag{2}$$

☐
$$2 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \tag{3}$$

☒
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \tag{4}$$

Explication : la réponse (1) est un développement limité à l'ordre 1 et non à l'ordre 3. Par ailleurs, la réponse (2) contient un terme $\frac{1}{x}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. Enfin, la réponse (3) contient un terme constant égal à 2 égal à $f(0) = 0$, ce qui n'est donc pas possible. La seule bonne réponse possible (4) venait de la [Bas22a, correction de l'exercice de TD 1.25].

Chapitre 2, section 2.4

Question 12 ♣ Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable si

■

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\underbrace{a_1h_1+a_2h_2+...+a_nh}_{\text{partie linéaire en }(h_1,h_2,...,h_n)} \\ \underbrace{+\sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_n^2}\,\eta\,(h_1,h_2,...,h_n),}_{\text{partie d'ordre supérieur}} \quad (1)$$

où

$$\lim_{(h_1,h_2,...,h_n)\to 0}\eta\,(h_1,h_2,...,h_n)=0. \quad (2)$$

■

$$\forall (x_1,...,x_n)\in\mathbb{R},\quad f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,...,x_n)h_i \\ +\sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_n^2}\,\eta\,(h_1,h_2,...,h_n)\,, \quad (3)$$

avec (2).

□ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : (1) et (2) proviennent de la définition 2.17 du cours. Voir aussi la proposition 2.21 du cours qui fournit (2) et (3).

Chapitre 2, section 2.5

Question 13 Si f est dérivable en x, on a

$$\boxed{\Delta f=\left|f'(x)\right|\Delta x,} \quad (1)$$

Cette équation sera d'autant plus précise que Δx est "petit".

■ C'est faux. □ C'est vrai.

Explication : Attention, d'après le début de la section 2.5.2.1, l'égalité (1) n'est vraie que si fait on l'hypothèse toujours implicitement faite (2.50) du cours.

Généralités

Question 14 ♣ On suppose que l'on a montré la double implication

$$\mathcal{A}\Longleftrightarrow\mathcal{B},$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propriétés. Alors,

■ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{B}$
■ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{A}$
■ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{A}$
■ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{B}$
□ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Simple question de vocabulaire, puisque

$$\mathcal{A}\Longleftrightarrow\mathcal{B},$$

est équivalent à

$$\mathcal{A}\Longrightarrow\mathcal{B}\text{ et }\mathcal{B}\Longrightarrow\mathcal{A}$$

En effet, d'après `https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_nécessaire` en logique mathématique, une condition nécessaire à l'assertion $\mathcal{A}$ est une assertion $\mathcal{B}$ telle que : $\mathcal{A}\Longrightarrow\mathcal{B}$. Autrement dit, il est nécessaire que l'assertion $\mathcal{B}$ soit vraie pour que l'assertion $\mathcal{A}$ le soit.

D'après `https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_suffisante`, une condition suffisante à l'assertion $\mathcal{B}$ est une assertion $\mathcal{A}$ telle que : $\mathcal{A}\Longrightarrow\mathcal{B}$. Autrement dit, il suffit que l'assertion $\mathcal{A}$ soit vraie pour que l'assertion $\mathcal{B}$ le soit.

Références

[Bas22a] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 141 pages.

[Bas22b] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.

[Bas22c] J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 95 pages.