Matériaux 3A MFImater — Automne 2024

QCM (maison) pour le 02 octobre 2024

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 2, section 2.4

Question 1 ♣ Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable si

- ■

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\underbrace{a_1h_1+a_2h_2+...+a_nh}_{\text{partie linéaire en }(h_1,h_2,...,h_n)} + \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_n^2}\,\eta\,(h_1,h_2,...,h_n)}_{\text{partie d'ordre supérieur}}, \tag{1}$$

où

$$\lim_{(h_1,h_2,...,h_n)\to 0}\eta\,(h_1,h_2,...,h_n)=0. \tag{2}$$

- ■

$$\forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R},\quad f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,...,x_n)h_i + \sqrt{h_1^2+h_2^2+...+h_n^2}\,\eta\,(h_1,h_2,...,h_n)\,, \tag{3}$$

avec (2).

- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : (1) et (2) proviennent de la définition 2.15 du cours. Voir aussi la proposition 2.19 du cours qui fournit (2) et (3).

Chapitre 2, section 2.5

Question 2 Si f est dérivable en x, on a

$$\boxed{\Delta f=\left|f'(x)\right|\Delta x,} \tag{1}$$

Cette équation sera d'autant plus précise que Δx est "petit".

■ C'est faux. ☐ C'est vrai.

Explication : Attention, d'après le début de la section 2.5.2.1. , l'égalité (1) n'est vraie que si fait on l'hypothèse toujours implicitement faite $f'(x)\neq 0$.

Chapitre 3, section 3.2

Question 3 Posons

$$I = \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\,dx.$$

On a

- ☒ $$I = \ln(2)\,. \tag{1}$$
- ☐ $$I = -1. \tag{2}$$
- ☐ $$I = 2\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{3}$$

Explication : On peut éliminer d'emblée les résultats des équations (2) et (3). En effet, on a, puisque $x \mapsto \tan$ est croissante sur $[0, 1/3\,\pi]$

$$\forall x \in [0, 1/3\,\pi]\,, \quad 0 \leq \tan(x) \leq \tan(1/3\,\pi)\,,$$

et par intégration sur $[0, 1/3\,\pi]$

$$0 \leq \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\,dx \leq 1/3\,\pi \tan(1/3\,\pi)\,,$$

et en particulier puisque $1/3\,\pi < 2$

$$-1 < I < 2\tan(1/3\,\pi)\,.$$

Il ne reste plus que le résultat correct ((1)), issu de la [Bas22, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.1, question 5].

Question 4 Posons

$$I = \int_1^3 (2\,x-1)^{-1}\,dx.$$

On a

- ☒ $$I = 1/2\,\ln(5)\,. \tag{1}$$
- ☐ $$I = -1. \tag{2}$$
- ☐ $$I = 10. \tag{3}$$

Explication : On peut éliminer d'emblée les résultats des équations (2) et (3). En effet, on a, puisque $x \mapsto (2\,x-1)^{-1}$ est (définie) et décroissante sur $[1, 3]$

$$\forall x \in [1, 3]\,, \quad \frac{1}{5} \leq (2\,x-1)^{-1} \leq 1,$$

et par intégration sur $[1, 3]$

$$\frac{2}{5} \leq \int_1^3 (2\,x-1)^{-1}\,dx \leq 2,$$

et en particulier puisque $2 < 10$

$$-1 < I < 10$$

Il ne reste plus que le résultat correct ((1)), issu de la [Bas22, CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.1, question 7]

Chapitre 4, section 4.2

Question 5 La solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t)\,,$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2,$$

est donnée par $y(t) = \left(2 - 1/5\,e^1\right) e^{3/2} e^{-3/2\,t} + 1/5\,e^t$.

■ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Explication : Ici, ce n'est pas la peine de résoudre l'équation différentielle de l'énoncé, il suffit de vérifer que la fonction y donnée vérifie bien l'équation différentielle de l'énoncé ce qui est ce cas ici ! Voir la détermination de la solution dans la [Bas22, correction de l'exercice de TD 6.3, question 1].

Question 6 La solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = t^2 + t,$$

est donnée par $y(t) = ce^{-t} + 1 - t + t^2$.

■ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Explication : Ici, ce n'est pas la peine de résoudre l'équation différentielle de l'énoncé, il suffit de vérifer que la fonction y donnée vérifie bien l'équation différentielle de l'énoncé ce qui est ce cas ici ! Voir la détermination de la solution dans la [Bas22, correction de l'exercice de TD 6.3, question 4].

Question 7 La solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t),$$

avec la condition initiale

$$y(t_0) = y_0.$$

■ existe et est unique. ☐ existe mais n'est pas nécessairement unique.
☐ n'existe pas nécessairement.

Explication : On a déterminé cette unique solution grâce aux différentes méthodes vues en cours !

Question 8 Si on choisit une fonction z dérivable sur $[t_0, +\infty[$, on peut déterminer a, b, y_0 et t_0 et f telle que z soit solution de de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad az'(t) + bz(t) = f(t), \tag{1a}$$

avec la condition initiale

$$z(t_0) = y_0. \tag{1b}$$

■ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Explication : Il suffit de prendre a, b et t_0 quelconques et de poser $f(t) = az'(t) + bz(t)$ et $y_0 = f(t_0)$. Par définition de f, z est solution de l'équation différentielle (1) !

Chapitre 7

Question 9 ♣ J'ai acheté une gomme et un styo. Le stylo coûte 10 € de plus que la gomme et j'ai payé en tout 11 €. La gomme coûte

☐ 3 € ☐ 1 € ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir la [Bas22, correction de l'exercice de TD 4.3]

Question 10 Le système matriciel $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix},$$

■ possède une unique solution égale à $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

☐ ne possède aucune solution
☐ possède un nombre infini de solution

Question 11 Le système matriciel $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix},$$

☐ possède une unique solution
■ ne possède aucune solution
☐ possède un nombre infini de solution

Question 12 Le système matriciel $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix},$$

☐ possède une unique solution
☐ ne possède aucune solution
■ possède un nombre infini de solution

Question 13 ♣ Pour résoudre le système matriciel

$$AX = b, \tag{1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

je remarque que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une solution de ce système.

☐ J'en déduit que le système (1) possède une unique solution, qui est celle que j'ai.
☐ Je n'en déduit rien du tout.
■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication **:** On a au moins une solution X du système (1). D'après le théorème 7.25 du cours, on est

— soit dans le cas 1 (solution unique)
— soit dans le cas 2b (infinité de solution)

On ne peut en conclure plus sans étudier la matrice A à ce niveau du calcul. Ainsi, les deux réponses sont fausses puisque que l'on a evincé le cas 2a (aucune solution) du théorème 7.25 du cours. Un peu calcul supplémentaire nous montre que A est inversible et on est donc dans le cas 1 du théorème 7.25 du cours (solution unique) !

Références

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 141 pages.