Matériaux 3A MFImater — Automne 2025

QCM du 29 septembre 2025

Durée : 15 minutes

Documents autorisés : OUI ☐ NON ☒

Calculatrice autorisée : OUI ☐ NON ☒

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Les réponses seront données dans la feuille de réponse (à la fin du sujet).

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Chapitre 2, section 2.1

Question 1 Si une fonction est dérivable en a, on a alors

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + o(b - a).$$

■ C'est vrai   [B] C'est faux

Explication : Ce n'est rien d'autre qu'une conséquence de (2.11) du cours.

Question 2 ♣ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère l'assertion suivante

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left(a \neq b \Longrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = K \right). \tag{1}$$

■ Si (1) est vraie alors f est affine.
■ Si f est affine alors (1) est vraie.
■ Si f est constante alors (1) est vraie.
■ Si f est nulle alors (1) est vraie.
■ Si $f(x) = 2x + \pi$ alors (1) est vraie.
F Si $f(x) = 2x^5 + e$ alors (1) est vraie.
G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Rappelons le résultat suivant :
Montrer que toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left(a \neq b \Longrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = K \right), \tag{2}$$

sont les fonctions affines.
La démonstration en est la suivante :
Il suffit de raisonner par analyse/synthèse, ce qui revient à montrer condition nécessaire/suffisante ou encore unicité/existence.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$. Supposons que (2) ait lieu. Notons que, d'après (2), pour tout b différent de a, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq |K||b - a|,$$

ce qui est encore vrai pour $b = a$ et tout cela entraîne que

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \tag{3}$$

Fixons $a \in \mathbb{R}$. D'après (2), pour tout b différent de a, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = K,$$

ce qui implique

$$f(b) - f(a) = K(b - a),$$

et donc

$$f(b) = K(b - a) + f(a),$$

soit encore, en posant $\alpha = K$ et $\beta = f(a) - aK$,

$$\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad f(b) = \alpha b + \beta. \tag{4}$$

Notons que α est constant et que β dépend de a mais est bien sûr indépendant de b. (4) est vraie pour tout b différent de a mais, d'après (3), c'est encore vrai par continuité, quand b tend vers a. Ainsi (4) est aussi vraie en a. On a donc

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad f(b) = \alpha b + \beta. \tag{5}$$

ce qui est équivalent à f est affine.

2. Évidemment, dans l'autre sens, cela est immédiat. Si f est affine (5), implique *a fortiori* pour tout b différent de a, $(f(b) - f(a)/(b - a) = \alpha$, ce qui implique (2) .

Ainsi (1) est équivalent à f affine, ce dont découlent les différentes réponses.

Chapitre 3, section 3.2

Question 3 Posons

$$I = \int_0^e \ln(x)\, dx.$$

On peut affirmer que

■
$$I = 0. \tag{1}$$

B
$$I \text{ n'est pas définie parce que l'intégrande n'est pas continue sur } [0, e]. \tag{2}$$

C
$$I = -\infty \text{ parce que l'intégrande tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers zéro.} \tag{3}$$

Explication : On est en présence d'une intégrale impropre (voir [Bas22a, section 2.4].) qui est définie et de valeur donnée par (1). Voir la [Bas22b, correction de l'exercice de TD 3.2, question 3].

Question 4 ♣ La formule du changement de variable pour les intégrales s'écrit

■
$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{1}$$

■
$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{2}$$

■
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = \int_\alpha^\beta f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx. \tag{3}$$

$\boxed{\text{D}}$ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Toutes ces réponses sont exactes ! Les équations (1) et (2) correspondent aux formules (3.12) et (3.25) du cours. Quant à la formule (3), elle est équivalente à la formule (1) si l'on pose $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$. Voir aussi la remarque 3.7 page 26 du cours.

Question 5 ♣
Reprenons l'exemple 3.4 page 24 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose

$$u = R \cos x,$$

c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par

$$\phi(x) = R \cos x. \tag{1}$$

L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x. Procèdons donc aux *trois* substitutions (3.7) du cours , (3.8) du cours et (3.10) du cours .

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x}$. On a donc successivement

$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} &= \sqrt{R^2 \left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R| \left|\sin x\right|,\end{aligned}$$

   et puisque $R \geq 0$

$$= R \left|\sin x\right|.$$

2. Cherchons *une* valeur de α telle que (3.8a) du cours ait lieux. Il suffit donc que

$$0 = R \cos(\alpha). \tag{2}$$

   Choisissons [a]

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

   De même, cherchons *une* valeur de β telle que (3.8b) du cours ait lieux. Il suffit donc que

$$R = R \cos(\alpha). \tag{4}$$

   Choisissons

$$\alpha = 2\pi. \tag{5}$$

3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R \sin x$, et donc $du = -R \sin x dx$. Ainsi,

$$\text{on remplace } du \text{ par } -R \sin dx.$$

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :

$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R \left|\sin x\right| \left(-R \sin x\right) dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left|\sin x\right| \sin x dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big).$$

On a donc

$$\begin{aligned}I &= -R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) dx,\\ &= -\frac{1}{2} R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x) dx,\\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$

Et donc, on a

$$I_R = -\frac{3\pi}{4} R^2. \tag{6}$$

$\boxed{A}$ Ce raisonnement est faux parce que $\phi : x \mapsto R \cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
$\boxed{B}$ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.2.4.1 page 23 du cours est fausse.
$\boxed{C}$ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (3) et (5) sont erronées.
$\boxed{D}$ Ce raisonnement est vrai.
■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On renvoie à l'annexe G du cours.

---

[a] On pourra prendre tout autre valeur !

Question 6 Soit

$$I = \int_0^1 2\,x^2 + 13\,x + 15dx$$

On a

■ $I = \frac{133}{6}$ [B] $I = \frac{133}{3}$ [C] $I = \frac{125}{2}$

Explication : On intègre le polynôme directement !

Question 7 Soit

$$I = \int_0^1 x^7 + 2\,x^2 + 13\,x + 15dx$$

On a

■ $I = \frac{535}{24}$ [B] $I = \frac{535}{12}$ [C] $I = \frac{543}{8}$

Explication : On intègre le polynôme directement !

Chapitre 4, section 4.2

Question 8 La solution de l'équation différentielle

$$-\,y'(t) + 2y(t) = 1 + t + t^2.$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

est donnée par $y(t) = -\frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \left(1/2\,t^2 + t + 1\right)$.

■ C'est vrai. [B] C'est faux.

Explication : Ici, ce n'est pas la peine de résoudre l'équation différentielle de l'énoncé, il suffit de vérifer que la fonction y donnée vérifie bien l'équation différentielle de l'énoncé ce qui est ce cas ici ! Voir la détermination de la solution dans la [Bas22b, correction de l'exercice de TD 6.2].

Question 9 Si on choisit une fonction z dérivable sur $[t_0, +\infty[$, on peut déterminer a, b, y_0 et t_0 et f telle que z soit solution de de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad az'(t) + bz(t) = f(t), \tag{1a}$$

avec la condition initiale

$$z(t_0) = y_0. \tag{1b}$$

■ C'est vrai. [B] C'est faux.

Explication : Il suffit de prendre a, b et t_0 quelconques et de poser $f(t) = az'(t) + bz(t)$ et $y_0 = f(t_0)$. Par définition de f, z est solution de l'équation différentielle (1) !

Feuille de réponses :

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille.
Il est préférable que vous utilisiez un stylo noir ou bleu ou un crayon à papier de type B ou HB. Vous devez noircir complètement [1] les cases choisies. Les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

Question 1 : ■ B
Question 2 : ■ ■ ■ ■ ■ F G
Question 3 : ■ B C
Question 4 : ■ ■ ■ D
Question 5 : A B C D ■
Question 6 : ■ B C
Question 7 : ■ B C
Question 8 : ■ B
Question 9 : ■ B

1. Dans ce cas, vous pouvez effacer la/les case(s) avec la gomme ou la recouvrir de ruban correcteur et vous n'avez pas d'autre possibilité de corriger une case cochée par erreur.

Références

[Bas22a] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.

[Bas22b] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 141 pages.

[Bas22c] J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 95 pages.