POLYTECH LYON · Université Claude Bernard Lyon 1

Matériaux 3A MFImater — Automne 2025

QCM du 29 septembre 2025

Durée : 15 minutes

Documents autorisés : OUI ☐ NON ☒

Calculatrice autorisée : OUI ☐ NON ☒

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Les réponses seront données dans la feuille de réponse (à la fin du sujet).

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Question 1 Si une fonction est dérivable en a, on a alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + o(b-a).$$

[A] C'est vrai [B] C'est faux

Question 2 ♣ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère l'assertion suivante

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left(a \neq b \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = K\right). \tag{1}$$

[A] Si (1) est vraie alors f est affine.
[B] Si f est affine alors (1) est vraie.
[C] Si f est constante alors (1) est vraie.
[D] Si f est nulle alors (1) est vraie.
[E] Si $f(x) = 2x + \pi$ alors (1) est vraie.
[F] Si $f(x) = 2x^5 + e$ alors (1) est vraie.
[G] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 Posons

$$I = \int_0^e \ln(x)\, dx.$$

On peut affirmer que

[A]

$$I = 0. \tag{1}$$

[B]

$$I \text{ n'est pas définie parce que l'intégrande n'est pas continue sur } [0, e]. \tag{2}$$

[C]

$$I = -\infty \text{ parce que l'intégrande tend vers } -\infty \text{ quand } x \text{ tend vers zéro.} \tag{3}$$

Question 4 ♣ La formule du changement de variable pour les intégrales s'écrit

[A]

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{1}$$

[B]

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x))\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \tag{2}$$

[C]

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\phi'(x)dx. \tag{3}$$

[D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣
Reprenons l'exemple 3.4 page 24 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose

$$u = R \cos x,$$

c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par

$$\phi(x) = R \cos x. \tag{1}$$

L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x. Procèdons donc aux *trois* substitutions (3.7) du cours , (3.8) du cours et (3.10) du cours .

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x}$. On a donc successivement

$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} &= \sqrt{R^2 \left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R| \left|\sin x\right|,\end{aligned}$$

   et puisque $R \geq 0$

$$= R \left|\sin x\right|.$$

2. Cherchons *une* valeur de α telle que (3.8a) du cours ait lieux. Il suffit donc que

$$0 = R \cos(\alpha). \tag{2}$$

   Choisissons [a]

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

   De même, cherchons *une* valeur de β telle que (3.8b) du cours ait lieux. Il suffit donc que

$$R = R \cos(\alpha). \tag{4}$$

   Choisissons

$$\alpha = 2\pi. \tag{5}$$

3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R \sin x$, et donc $du = -R \sin x dx$. Ainsi,

   on remplace du par $-R \sin dx$.

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :

$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R \left|\sin x\right| \left(-R \sin x\right) dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left|\sin x\right| \sin x dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big).$$

On a donc

$$\begin{aligned}I &= -R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) dx,\\ &= -\frac{1}{2} R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x) dx,\\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$

Et donc, on a

$$I_R = -\frac{3\pi}{4} R^2. \tag{6}$$

$\boxed{A}$ Ce raisonnement est faux parce que $\phi : x \mapsto R \cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
$\boxed{B}$ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.2.4.1 page 23 du cours est fausse.
$\boxed{C}$ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (3) et (5) sont erronées.
$\boxed{D}$ Ce raisonnement est vrai.
$\boxed{E}$ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

a. On pourra prendre tout autre valeur !

Question 6 Soit

$$I = \int_0^1 2\,x^2 + 13\,x + 15 dx$$

On a

$\boxed{\text{A}}$ $I = \frac{133}{6}$ $\boxed{\text{B}}$ $I = \frac{133}{3}$ $\boxed{\text{C}}$ $I = \frac{125}{2}$

Question 7 Soit

$$I = \int_0^1 x^7 + 2\,x^2 + 13\,x + 15 dx$$

On a

$\boxed{\text{A}}$ $I = \frac{535}{24}$ $\boxed{\text{B}}$ $I = \frac{535}{12}$ $\boxed{\text{C}}$ $I = \frac{543}{8}$

Question 8 La solution de l'équation différentielle

$$-\,y'(t) + 2y(t) = 1 + t + t^2.$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

est donnée par $y(t) = -\frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \left(1/2\,t^2 + t + 1\right)$.

$\boxed{\text{A}}$ C'est vrai. $\boxed{\text{B}}$ C'est faux.

Question 9 Si on choisit une fonction z dérivable sur $[t_0, +\infty[$, on peut déterminer a, b, y_0 et t_0 et f telle que z soit solution de de l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad az'(t) + bz(t) = f(t), \tag{1a}$$

avec la condition initiale

$$z(t_0) = y_0. \tag{1b}$$

$\boxed{\text{A}}$ C'est vrai. $\boxed{\text{B}}$ C'est faux.

Feuille de réponses :

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille.
Il est préférable que vous utilisiez un stylo noir ou bleu ou un crayon à papier de type B ou HB. Vous devez noircir complètement [1] les cases choisies. Les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

Question 1 : A B
Question 2 : A B C D E F G
Question 3 : A B C
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D E
Question 6 : A B C
Question 7 : A B C
Question 8 : A B
Question 9 : A B

1. Dans ce cas, vous pouvez effacer la/les case(s) avec la gomme ou la recouvrir de ruban correcteur et vous n'avez pas d'autre possibilité de corriger une case cochée par erreur.