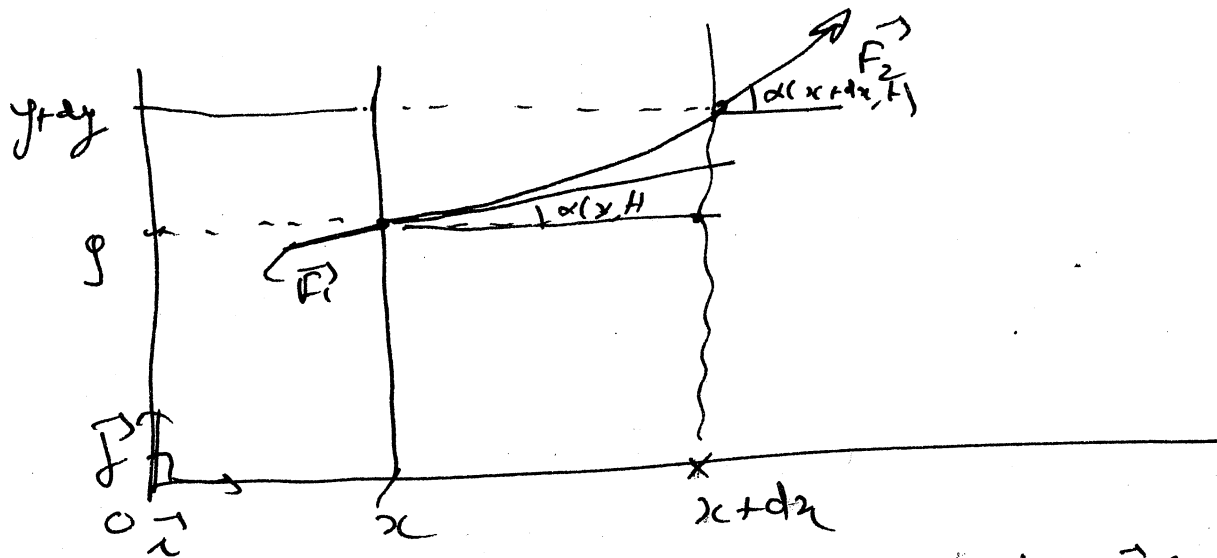


TD "guitare" (Reprendre MN/B!!)

1

Rajouter intro sur ondes planes (ronds dans l'eau) et 3D (ondes radio). On se concentre maintenant à la 1D

I) Équation corde vibrante



Remarque → g.p. 13is

② on a plutôt $\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F}(x) \\ \vec{F}_2 = \vec{F}(x+dx) \end{cases}$ au lieu de $\vec{F}_1 = T(\cos \alpha(x, t) \vec{i} + \sin \alpha(x, t) \vec{j})$

$$\vec{F}_1 = -T \left((\cos(\alpha(x, t))) \vec{i} + \sin(\alpha(x, t)) \vec{j} \right)$$

$$= -T \left(\cos \alpha(x, t) \left(\vec{i} + \tan(\alpha(x, t)) \vec{j} \right) \right)$$

$$\vec{F}_2 = T \cos(\alpha(x+dx, t)) \left(\vec{i} + \tan(\alpha(x+dx, t)) \vec{j} \right)$$

1) L'ordre 1 $\cos \alpha = 1 + o(\alpha)$ (petite dérivée)

$$d'apr \Delta \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = T \left(\tan(\alpha(x+dx, t)) - \tan(\alpha(x, t)) \right) \vec{j} \quad (1)$$

(Bis)

Remarque: on peut aussi dire que l'attribution

$T(x)$, c'est-à-dire la partie droite de la corde sur la gauche (grosses) de l'ordre x .

on a alors:

$$\vec{F} = \cancel{T(x) \cos(\alpha(x, t)) \vec{i} + T(x) \sin(\alpha(x, t)) \vec{j}}$$

$$\vec{F}_1 = -T(x) \cos(\alpha(x, t)) (\vec{i} + \tan(\alpha(x, t)) \vec{j})$$

$$\vec{F}_2 = T(x+dx) \cos(\alpha(x+dx, t)) (\vec{i} + \tan(\alpha(x+dx, t)) \vec{j})$$

$$\cancel{\vec{F} = T(x) \cos(\alpha(x, t)) \vec{i} + T(x) \sin(\alpha(x, t)) \vec{j}} \quad \text{avec } \cos \approx 1, \text{ or es de deux.}$$

$$\Delta \vec{F} = (T(x+dx) - T(x)) \vec{i} + (T(x+dx) \tan(\alpha(x+dx, t)) - T(x) \tan(\alpha(x, t))) \vec{j}$$

et de (5) on déduit en projetant sur $\vec{i}$

$$T(x+dx) = T(x) \Rightarrow T(x) = T \in \mathbb{R}.$$

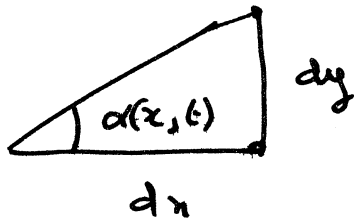
en $x=0$

$$\begin{array}{c} \leftarrow T(0) \\ \hline \rightarrow T(0) \end{array}$$

admet une limite constante $T(0) > 0$

$$\text{donc } T(x) = T > 0.$$

(2)



$$\text{Or } \alpha(x, t) = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2)$$

----- Adapté. Petit déplacement

donc selon (2)

$$\Delta \vec{F} = T \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right) \vec{j} \quad (3)$$

1) L et l'ordre 1

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

donc selon (3)

$$\Delta \vec{F} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) dx \vec{j} \quad (4)$$

Justifier en utilisant $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et un DL à l'ordre 1 que $dl = dx$.

Or principe de conservation de la dynamique: ($dm = \mu dx$)

$$\Delta \vec{F} = dm \vec{a} = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \vec{j} \quad (5)$$

de (4)-(5) $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ⁽⁷⁾ $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow \text{vitesse}$ (6)

II Résolution

(3)

1) milieu infini $(x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) y = 0$$

posons $a = x - ct$
 $b = x + ct$

Q 3 Bis

$$c = \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} Y(a, b) = 0$$

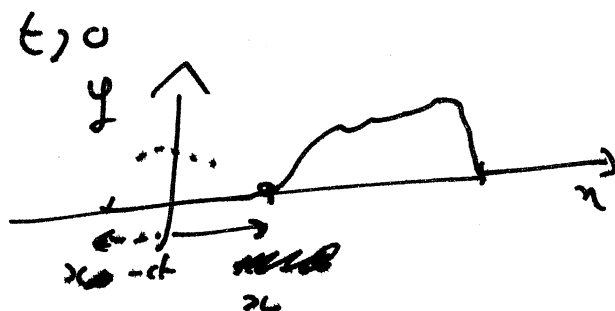
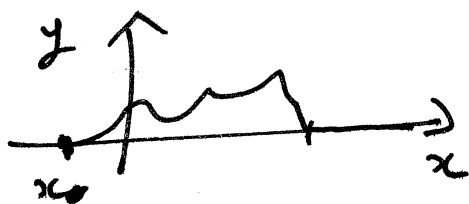
$$\Leftrightarrow \frac{\partial Y}{\partial b}(a, b) = F(a)$$

$$\Leftrightarrow Y(a, b) = F(a) + G(b)$$

d'où $y = f(x - ct) + G(x + ct)$

propagation
 signal à la vitesse c

$t=0$
 $F(x)$



nicht 2. hatre

3 B's

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial b} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial t}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial t}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial t} & \frac{\partial b}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -c & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgabe

conditio $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{y_1}{c} \\ -x_1 + x_2 &= \frac{y_2}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1 - y_2}{2c} \\ x_2 &= \frac{y_1 + y_2}{2c} \end{aligned}$$

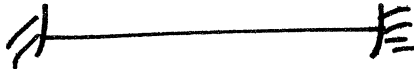
$$\text{d.h.} \quad \frac{\partial}{\partial a} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t}$$

Ph Section 2!

2.) milieu fini

Les 2 axes ont des ordres de grandeur séparés
donnant naissance à deux niveaux rigides.

CL $y(d,t) = y(L,t) = 0 \quad (10)$ 

CE $y(x,0) = y_0(x)$ connue. (11) + l'équation initiale $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$

on écrit une séparation des variables

(5)

$$y(x, t) = X(x) T(t)$$

$$\text{d'où } 0 = X''(x) T(t) - \frac{1}{c^2} X(x) T''(t)$$

$$\text{d'où en supposant } X(x) \neq 0 \quad T(t) \neq 0$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -d \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \quad (12a)$$

$$\text{on a donc } X'' + dX = 0 \quad \text{caractéristique } q = d \quad c < L$$

$$X(0) T(t) = y(0, t) = 0$$

$$X(L) T(t) = y(L, t) = 0 \quad \text{car } d > 0 \text{ sinon } X \equiv 0$$

$$\text{ainsi } d = k^2 \quad \text{où } k > 0 \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (12)$$

$$X'' + k^2 X = 0$$

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

$$X(0) = 0 = A \Rightarrow$$

$$X(L) = 0 = B \sin kL \Rightarrow B \neq 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (13) \quad \text{et } X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)} \quad (\text{caractéristique})$$

$$\text{d'où } T''(t) + k_n^2 T(t) = 0 \quad \text{donc}$$

$$(12a) \Rightarrow$$

$$c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

multiples

$$n=1 \quad \text{---}$$

$$n=2 \quad \text{---}$$

$$n=3 \quad \text{---}$$

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \quad \text{où } \omega_n = c k_n = c \frac{n\pi}{L}$$

d'où $T_m(t) = A_m \cos\left(\frac{cm\pi}{L} t\right) + B_m \sin\left(\frac{cm\pi}{L} t\right)$

d'où $y_m(x, t) = \left(A_m \cos\left(\frac{cm\pi}{L} t\right) + B_m \sin\left(\frac{cm\pi}{L} t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (15)$
 et $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_m(x, t)$

on cherche des λ nuls & positifs. compatible avec les p.b.c. & les
 laissons

$y(x, t) = y(x, 0) = y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ d'après

et par orthogonality....

$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ connus. (15b)

puis $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cm\pi}{L} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \frac{cm\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$\Rightarrow B_n = 0.$

d'où $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{cm\pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (15c)$

fréquence fondamentale $\rightarrow$ mode 1 (les autres s'attachent...)

$y(x, t) \approx A_1 \cos\left(\frac{c\pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ fréquence $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\alpha}$ d'où $f = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{2\pi}$

$\downarrow$
 $\cos(\alpha t)$

d'où $f = \frac{1}{2\pi} \frac{c\pi}{L} = \frac{c}{2L}$

inverse du λ
 pour aller
 d'un nœud à
 l'autre

d'après (6) $\boxed{f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$ (16) $T \rightarrow f \rightarrow \lambda \rightarrow f \rightarrow$

Remarque $\rightarrow$

III) Calcul des explications des notes d'un guitariste

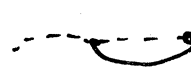
(7)

D'après (6) à fusion et même ligne de notes.

$$f \propto \frac{1}{L}$$

• Si $L \rightarrow 4/2$ $f \rightarrow 8/2$ à l'octave.

$\Rightarrow$ Le guitariste a découvert qu'il faut doubler la longueur!

• A une longueur si on a $\dots \rightarrow$ 
on entend la fréquence double??
Parce que $\dots \rightarrow$ 

En musique occidentale $2/1$ est la plus pénible en
dessous duquel on ne distingue rien.

genre $\left\{ \begin{array}{l} \text{tempo} \\ \text{chorale} \end{array} \right. \rightarrow$ intalle chertige epan rejoind $1/2$ Tcm.

on obtient

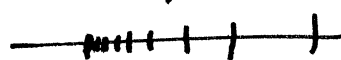
$$x_{12} = L_0 (1 - 2^{-1}) = \frac{L_0}{2}$$

Lim $x_m = 0$
 $m \rightarrow \infty$

$$x_{m+1} - x_m =$$

$$L_0 (1 - 2^{-\frac{m+1}{2}}) - L_0 (1 - 2^{-\frac{m}{2}})$$

$$= L_0 2^{-\frac{m}{2}} (1 - 2^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow 0$$



Enfin si $L_0 = 65$ cm (standard d'origine)

On a maintenant

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 3,64$$

$$x_2 = 7,09$$

$$x_3 = 10,34$$

$$x_4 = 13,409$$

$$x_5 = 16,305$$

$$x_6 = 19,081$$

⋮

$$x_{12} = 32,5$$

$$x_{14} = 42,30$$

$$x_{16} = 48,75$$

$$42$$

$$31,4$$

finies par les notes des 6 cordes de l'organe, accordées
 (Mi Si Sol Ré La Mi)

Ra ^{ndr} ~~pas~~ de Ca 6. or cad at Mi₂ → orngat quatre

Ca₂ + quatre
Re₃ + quatre
Sd₃ + ~~quatre~~ Tia
Si₃ + quatre
Mi₄

puh cad par cad, orngat 1/2 torpar cad

α nld
Caxi

6	5	4	3	2	1 (=6)
Mi ₂	La ₂	Re ₃	Sd ₃	Si ₃	Mi ₄
Fa	La [#]				Fa
Fa [#]	Do				Fa [#]
Sd	Do [#]				Sd
Sd [#]	Re				Sd [#]
La	Re [#]				La [#]
La [#]					La [#]

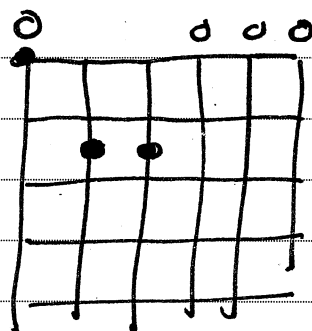
La[#] → La₄ = 440Hz
double orngat de Re
autre Re g ca

pour les cadex orngat de Re g ca

$$+ 2 \text{ cadex} + 2 \text{ fuites} = (2 + \frac{1}{2}) \times 2 + 1 = 5 + 1 = 6 \text{ for} = 1 \text{ d'ore!}$$

② α la h ca.

dernier ca : accord de mi_m = mi + Sd + ~~do~~ Si



mi ~~do~~ mi Sd Si mi
Si Re