

NOTES DE COURS DE L'UE MFImater

Matériaux 3A

MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES POUR L'INGÉNIEUR

2024-2025, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 28 août 2024

Le lien original de ce document est le suivant :

<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFImater/coursMFImater.pdf>

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

Table des matières

Avant-propos	iii
Introduction	iv
Chapitre 1. Premier tour de chauffe	1
Chapitre 2. Dérivée, différentiation	2
2.1. Dérivation	2
2.2. Développements limités et formules de Taylor-Lagrange	7
2.3. Applications en MNB	9
2.4. Dérivation par rapport à plusieurs variables	10
2.5. Incertitudes	13
Chapitre 3. Intégration	17
3.1. Intégration (théorie)	17
3.2. Intégration (pratique)	17
3.3. Intégration des fractions rationnelles et autres fonctions particulières	22
3.4. Et matlab symbolique ?	22
Chapitre 4. Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants	24
4.1. Introduction	24
4.2. Équations différentielles d'ordre un	24
4.3. Équations différentielles d'ordre deux	35
4.4. Lien avec MNB	35
4.5. Application en utilisation en DDRS	35
4.6. Et matlab symbolique ?	35
Chapitre 5. Analyse dimensionnelle	37
Chapitre 6. Chute libre	39
6.1. Introduction sur la modélisation de la chute libre	39
6.2. Détermination géométrique de la parabole	39
6.3. Équations de la paraboles	40
6.4. Caractéristiques de la parabole	44
6.5. Exemple de mouvement de chute libre contraint	46
6.6. Application et exemple	47
6.7. Parabole de sûreté	47
6.8. Application et exemple dans un cas où les frottements de l'air ne sont plus négligés	47
Chapitre 7. Systèmes linéaires et matrices	48
7.1. Rappels sur les systèmes linéaire d'ordre n	48
7.2. Programmation informatique	52

7.3. Un peu de théorie	52
7.4. D'autres méthodes de résolutions de systèmes linéaires	56
Chapitre 8. Mise en situation A (Rappel de mécanique des fluides, Poussée d'Archimède)	57
8.1. Définition des fluides	57
8.2. Fluides au repos	58
Chapitre 9. Mise en situation B (équation des ondes)	65
Annexe A. Quelques développements limités usuels	66
Annexe B. Quelques dérivées usuelles	67
Annexe C. Quelques primitives usuelles	68
Annexe D. Rappels sur les racines d'un polynôme de degré 2	69
Annexe E. Intégration (théorie)	71
E.1. Références	71
E.2. Introduction informelle sur un exemple	71
E.3. «Le» principe	76
E.4. Intégrales impropres	77
E.5. Applications en MNB	77
Annexe F. Intégrales impropres	78
Annexe G. Quelques calculs de primitives	80
G.1. Primitives de fractions rationnelles	80
G.2. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus	82
G.3. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus hyperboliques	85
G.4. Intégrales abéliennes	87
Annexe H. Rappels des formules principales de la chute libre	90
Annexe I. Trigonométrie	92
I.1. Rappels et définitions de base	92
I.2. Quelques exercices	100
I.3. Autres rappels	107
I.4. Les angles sont, en fait, inutiles!	116
I.5. Propriétés des fonctions trigonométriques	118
I.6. Les fonctions trigonométriques réciproques	118
Annexe J. L'argument d'un nombre complexe et la fonction atan_2	119
J.1. L'argument d'un nombre complexe	119
J.2. La fonction atan_2	120
J.3. Exemples	122
Bibliographie	124

Avant-propos

Ce polycopié constitue les notes de cours de Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur du département Matériaux 3A (2024-2025, Automne).

Ce polycopié de cours est normalement disponible à la fois

- en ligne sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html> à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
 - 'Poste de travail',
 - puis sur le répertoire 'P:' (appelé aussi '\\teraetu\Enseignants'),
 - puis 'jerome.bastien',
 - puis 'Polytech',
 - puis 'Matériaux 3A'.
 - enfin sur 'MFImater'.

Vous pourrez consulter les deux url suivantes pour consulter en guise d'entraînement des annales des examens des années précédentes : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI.html> et <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFIappro.html>. *Attention*, certaines notions sont communes à cette UE mais pas toutes !

Introduction

Cette remise à niveaux en mathématiques se fera sous la forme d'un TD-CM intégré où les notions seront introduites par de nombreux exercices concrets (en partie issus de [Mac19]). Ces exercices seront données dans les notes de TD.

Quelques remarques seront faites dans ce polycopié sur l'utilisation des concepts qui seront vus en MNB. On pourra consulter le polycopié de cette UE [DB22].

Chapitre 1

Premier tour de chauffe

Cette partie théorique ne sera traitée qu'en TD (voir TD 1), sauf si souhaits particuliers. Plus de détails sur les vecteurs et la trigonométrie peuvent être trouvés dans l'annexe I et [Bas18a, chapitres 1 et 3] disponible sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/tutoratL2biomeca.pdf>.

Dérivée, différentiation

2.1. Dérivation

Cette section est directement issue de [Bas22a, Chapitre 1].

On pourra consulter, par exemple, [Vél03] ou [Bas18a, chapitre 4].

2.1.1. Notions de dérivées

On se donne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et un point a (dans son ensemble de définition).

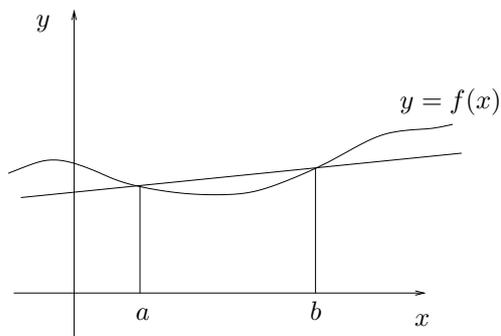


FIGURE 2.1. La droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

On rappelle que si $b \neq a$, la droite (cf. figure 2.1) passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation :

$$\frac{Y - f(a)}{X - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2.1)$$

Plus conventionnellement,

$$Y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(X - a) + f(a). \quad (2.2)$$

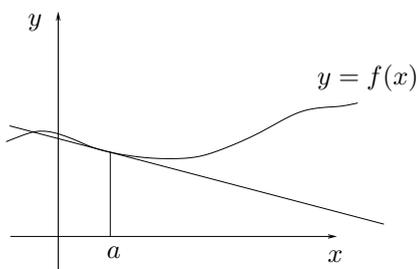


FIGURE 2.2. La tangente à la courbe au point $(a, f(a))$

Si on fait tendre b vers a , cette droite «tend» vers la tangente à la courbe au point $(a, f(a))$ (cf. figure 2.2). Ainsi, la pente de la droite d'équation (2.2) (égale à $(f(b) - f(a))/(b - a)$) tend vers un nombre, égal à la pente de la tangente à courbe. Ce nombre est noté $f'(a)$ et est appelé nombre dérivé¹ de f en a . Autrement dit :

$$f'(a) = \lim_{\substack{b \rightarrow a \\ b \neq a}} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2.3)$$

Cette limite n'existe pas nécessairement. Si elle existe, on dit que f est dérivable en a . On supposera que les fonctions étudiées sont toujours dérivables².

(2.3) est équivalent à : si f est dérivable en a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad \left(|a - b| \leq \eta \implies \left| f'(a) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| \leq \varepsilon \right) \quad (2.4)$$

Si on traduit (2.4), en "mots courants", cela pourrait donner : une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sera dérivable en un point a et aura pour nombre dérivé en ce point $f'(a)$ ssi "l'écart entre $f'(a)$ et le taux d'accroissement de f entre a et b (défini comme $(f(a) - f(b))/(a - b)$) est inférieur à tout nombre strictement positif donné à l'avance, dès que b est suffisamment proche de a ".

Par passage à la limite dans (2.2), on constate que l'équation de la tangente à la courbe en $(a, f(a))$ s'écrit

$$Y = f'(a)(X - a) + f(a). \quad (2.5)$$

De façon similaire à (2.1), on pourra retenir (2.5) sous la forme

$$\frac{Y - f(a)}{X - a} = f'(a). \quad (2.6)$$

On écrira parfois (2.3) sous la forme suivante (équivalente) : au voisinage de a ,

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + (b - a)\varepsilon(b), \quad (2.7a)$$

$$\text{avec } \lim_{b \rightarrow a} \varepsilon(b) = 0. \quad (2.7b)$$

ou alors (en posant $h = b - a$) au voisinage de a ,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \quad (2.8a)$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (2.8b)$$

Ces deux écritures constituent en fait, un développement limité³. Voir la section 2.2 page 7.

REMARQUE 2.1.

- (1) La notion de dérivée est liée à celle de vitesse instantanée en mécanique.
- (2) La tangente peut aussi être mise en évidence en faisant un zoom sur une courbe.

1. La fonction dérivée est la fonction, qui, à a associe $f'(a)$, si la dérivée existe.

2. Le but de cette UV n'est pas d'étudier les propriétés de «régularité» des fonctions ou plus généralement, les hypothèses théoriques nécessaires, mais de savoir utiliser les notions de mathématiques indispensables au métier d'ingénieur. Ainsi, on supposera toujours acquises ces différentes hypothèses théoriques

3. Les équations (2.8a) et (2.8b) peuvent s'écrire aussi, au «premier ordre» près en h et au voisinage de a :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a), \quad (2.9)$$

qu'on notera aussi sous la forme

$$\frac{df}{dx}(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (2.10)$$

Autrement dit, on assimile la courbe à la tangente. Cette notion se généralisera grâce aux formules de Taylor et de développements limités d'ordre plus élevés, où l'on assimilera f non plus à polynôme de degré un mais de degré n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2. Règles de dérivations

Donnons les règles suivantes : pour toute fonction f et g^4 pour tout réels α et β , pour tout réel x ,

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \quad (2.11a)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad (2.11b)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}, \quad (2.11c)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ si } g(x) \neq 0, \quad (2.11d)$$

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)), \quad (2.11e)$$

$$(f^\alpha)'(x) = \alpha(f^{\alpha-1})(x)f'(x), \quad (2.11f)$$

$$\left(f^{(-1)}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}, \text{ où } f^{(-1)} \text{ est l'application réciproque de } f. \quad (2.11g)$$

L'équation (2.11f) est souvent écrite pour α entier. Pour $\alpha = 1/2$, elle permet de retrouver par exemple que

$$(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Pour $\alpha = -1$, elle permettrait de retrouver $(1/f(x))'$.

On donne les dérivées usuelles en annexe B.

2.1.3. Rappels sur la monotonie d'une fonction

L'une des applications directes de la dérivation est l'étude la monotonie (croissance ou décroissance) d'une fonction, étudiée en section 2.1.4 page suivante. Rappelons-en quelques éléments.

On pourra consulter l'URL suivante (dont est issue cette section)

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_monotone

On rappelle :

DÉFINITION 2.2 (Monotonie au sens large). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction à valeurs réelles, dont le domaine de définition contient cet intervalle I . On dit que f est :

- croissante (ou : croissante au sens large) sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$;
- décroissante (ou : décroissante au sens large) sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) \geq f(y)$;
- monotone (ou : monotone au sens large) sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .

DÉFINITION 2.3 (Monotonie au sens strict). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction à valeurs réelles, dont le domaine de définition contient cet intervalle I . On dit que f est :

- strictement croissante sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$;
- strictement décroissante sur I si pour tout couple (x, y) d'éléments de I tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$;
- strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I .

EXEMPLE 2.4.

- (1) La fonction x^n , de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . En effet, si a, b, a' et b' sont des réels tels que $0 \leq a < b$ et $0 \leq a' < b'$, alors $aa' < bb'$. En effet, on a $b - a > 0$ d'où $(b - a)a' > 0$ d'où

$$ba' > aa'. \quad (2.12)$$

4. supposées être dérivable en x

De même $b' - a' > 0$, d'où $b(b' - a') > 0$ d'où

$$bb' > ba' \tag{2.13}$$

D'après (2.12) et (2.13), on a

$$bb' > ba' > aa'.$$

On en déduit par récurrence sur l'entier n que pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls tels que $x < y$, on a $x^n < y^n$.

- (2) Lorsque n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est strictement croissante sur \mathbb{R} . En effet, elle est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ (cf. l'exemple précédent) et impaire.

PROPOSITION 2.5 (bijection). *Une application strictement monotone et continue d'un intervalle $I = (a, b)$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ induit une bijection strictement monotone de I vers $[f(a), f(b)]$ ⁵ dont la bijection réciproque est strictement monotone de $[f(a), f(b)]$ vers I , strictement croissante (resp. décroissante) si f l'est.*

2.1.4. Application de la dérivation à l'étude de la monotonie d'une fonction

THÉORÈME 2.6 (Lien entre signe de la dérivée et monotonie). *Soient I un intervalle réel et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I . Alors,*

- (1) *f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).*
- (2) *f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et de plus l'ensemble des points où la dérivée f' s'annule est d'intérieur vide (c'est-à-dire qu'il ne contient aucun intervalle non réduit à un singleton).*
- (3) *f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

En pratique, notons que la seconde assertion du point 2 est vraie en particulier si les zéros⁶ de f' sont en nombre fini. En retiendra donc plutôt la forme simplifiée suivante :

PROPOSITION 2.7 (Lien entre signe de la dérivée et monotonie). *Soient I un intervalle réel et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I . Alors, si $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et si les zéros de f' sont en nombre fini alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .*

De cela, on déduira les célèbres tableaux de variations.

EXEMPLE 2.8. Traitons cet exemple sous forme d'exercice corrigé.

Énoncé

- (1) Sur l'intervalle $[1, 3]$, étudier la fonction polynômiale donnée par

$$p(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 1. \tag{2.14}$$

- (2) La tracer succinctement
- (3) En déduire ses extrêmes.
- (4) Quels sont les extrêmes de la fonction $|p|$ sur $[1, 3]$?

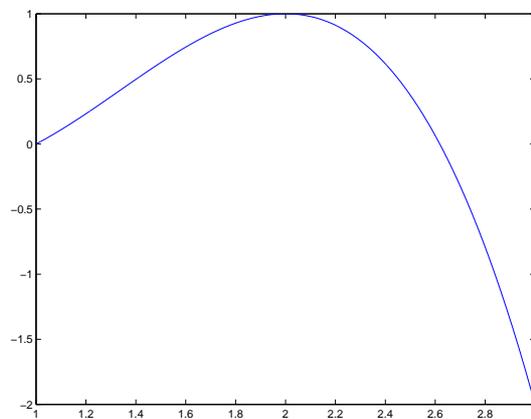
Corrigé

- (1) La dérivée p' de p vaut

$$p'(x) = -3x^2 + 8x - 4, \tag{2.15}$$

dont les racines sont $2/3$ et 2 . On en déduit le tableau de variation de la fonction p . Voir le tableau 2.1 page suivante. Ainsi, p est strictement croissante sur $[1, 2]$ et p est strictement décroissante sur $[2, 3]$.

x	1	2	3
signe de $p'(x)$	+	0	-
variations de p	0	1	-2

TABLE 2.1. Tableau de variation de p FIGURE 2.3. Le tracé de la fonction p .

(2)

Voir la figure 2.3.

(3) Les extrémums de p sont les valeurs par p des valeurs appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Leurs images par p sont $\{0, 1, -2\}$. Ainsi, les extrémums de p sont -2 , pour le minimum et 1 , pour le maximum.(4) On vérifie que 0 et 2 sont le minimum et le maximum de $|p|$.

REMARQUE 2.9.

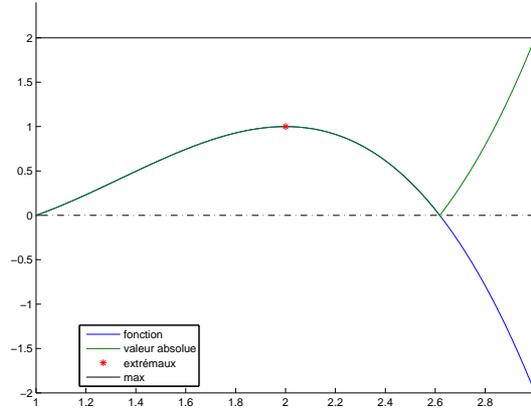
- Cette majoration d'une fonction sera très souvent faite en MNB, pour majorer des erreurs d'interpolation, d'intégration
-

Si on utilise la fonction http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/fichiers_matlab/maxabsfun.m, disponible sur le web, on obtient directement le résultat suivant : le maximum de $|p|$ est égal à 2 . Voir la figure 2.4.

- En fait, cet exercice a été posé « à l'envers » ! On se donne x_0, x_1 et x_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à $1, 2$ et 3) et y_0, y_1 et y_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à $0, 1$

5. si a n'est pas fini, $f(a)$ désigne la limite de $f(x)$ quand x tend vers a , qui existe dans $[-\infty, \infty]$; idem en b .

6. c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $f'(x) = 0$. On parle aussi de racine de f' .

FIGURE 2.4. Le résultat de la fonction `maxabsfun.m`.

et -2). On cherche une fonction polynomiale p telle que

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0, \\ p(x_1) &= y_1, \\ p'(x_1) &= y_1, \\ p(x_2) &= y_2. \end{aligned}$$

La théorie de l'interpolation nous dit que ce polynôme existe et est unique et permet de le construire. Voir [BM03] et [DB22].

2.2. Développements limités et formules de Taylor-Lagrange

Cette section est directement issue de [Bas22a, Chapitre 1].

2.2.1. Développements limités

On pourra consulter l'URL suivante (dont est issue cette section)

http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9veloppement_limit%C3%A9

Un développement limité généralise à l'ordre n quelconque, l'approximation à l'ordre 1 de la fonction par sa tangente. En effet, on peut écrire l'équation (2.7) sous la forme équivalente :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad (2.16)$$

où ε est une fonction tendant vers zéro quand x tend vers a .

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe a_0, a_1, \dots, a_n et une fonction ε tendant vers zéro au voisinage de zéro vérifiant

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n\varepsilon(x - a) = \sum_{i=0}^n a_i(x - a)^i + (x - a)^n\varepsilon(x) \quad (2.17)$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n) = \sum_{i=0}^n a_i(x - a)^i + o((x - a)^n). \quad (2.18)$$

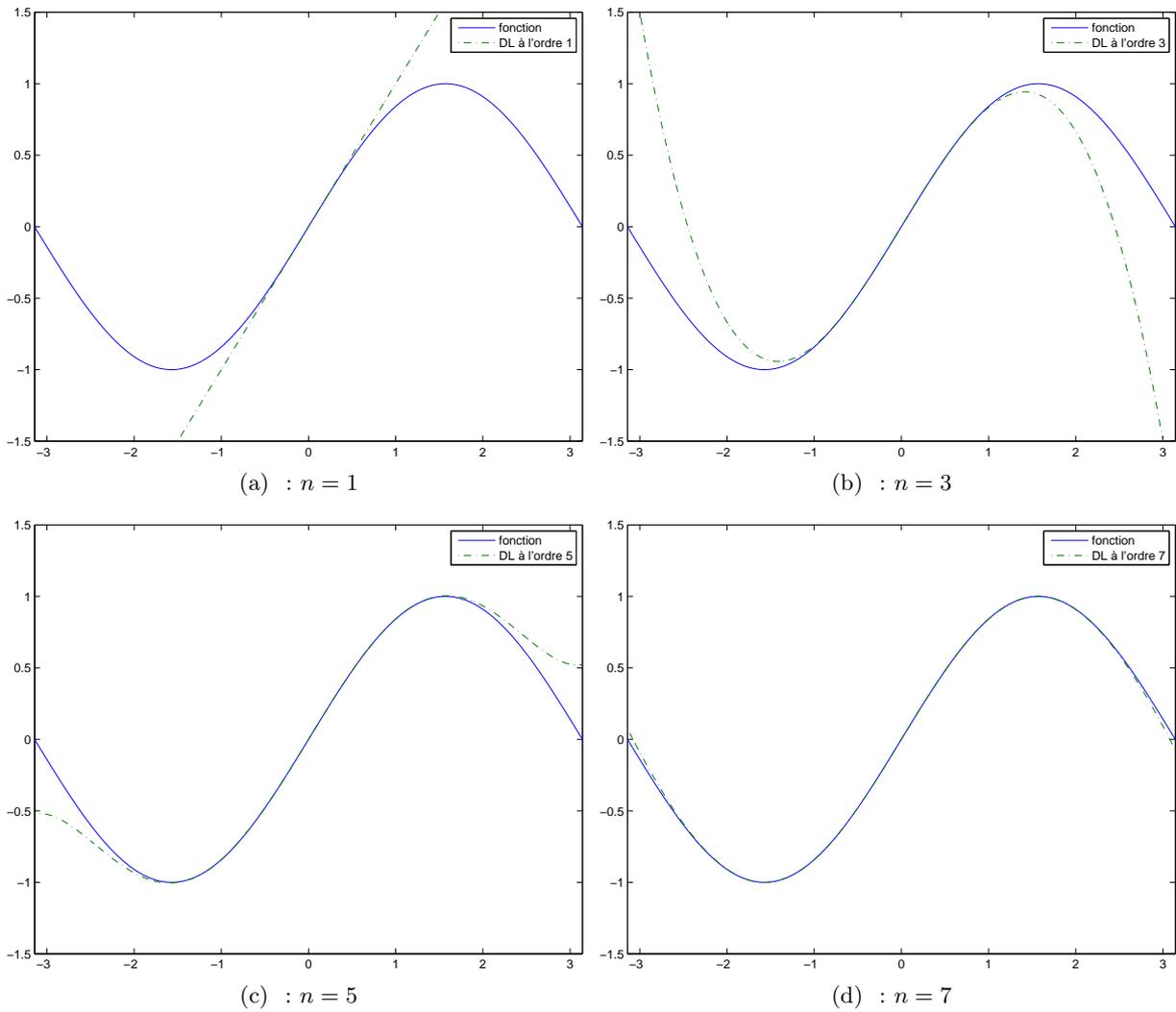


FIGURE 2.5. Tracé de la fonction sinus et de son approximation par différents développements limités d'ordre n .

Si f est dérivable n fois en a , on montre que l'on a alors

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n) \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}f^{(i)}(a)(x-a)^i + o((x-a)^n). \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

On donne les développements limités usuels en annexe A.

Voir le fichier joint (sous matlab) `developpement_limite`, grâce auquel on été obtenus les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x + o(x^1), \\ \sin(x) &= -1/6 x^3 + x + o(x^3), \\ \sin(x) &= \frac{1}{120} x^5 - 1/6 x^3 + x + o(x^5), \\ \sin(x) &= -\frac{1}{5040} x^7 + \frac{1}{120} x^5 - 1/6 x^3 + x + o(x^7).\end{aligned}$$

Voir aussi la figure 2.5.

Les développements limités sont locaux : ils fournissent des renseignements sur le comportement d'une fonction au voisinage d'un point a . Il existe aussi d'autres formules (celles de Taylor-Lagrange) où l'on remplace la fonction inconnue ε par un terme qui peut être majoré par une dérivée de f . Voir section 2.2.2.

Les développements limités peuvent s'ajouter, se multiplier, se diviser, se composer, comme des polynômes usuels.

Voir les exercices de TD correspondant.

2.2.2. Formules de Taylor-Lagrange

En face du développement limité (2.19) (aussi appelé formule de Taylor-Young), on trouve aussi les formules de Taylor-Lagrange qui s'écrivent :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, \quad (2.20)$$

où ξ est un réel (inconnu) strictement compris entre a et x .

REMARQUE 2.10. Sur l'utilisation de la formule (2.20) pour approcher numériquement $\cos x$ et $\sin x$, on pourra consulter les exercices du TD 1 de [Bas22c].

REMARQUE 2.11. Sur l'utilisation de la formule (2.20) pour approcher numériquement e^x et $\ln(1+x)$, on pourra consulter les exercices du TD 1 de [Bas22c].

2.3. Applications en MNB

En MNB, nous proposerons des algorithmes de recherche de zéro (ou de racine) de fonction, pour lesquels, la continuité des fonction est indispensable, puisqu'elle assure l'existence de ces zéros et intervient comme condition nécessaire de convergence de l'algorithme.

On utilisera les études de fonctions pour étudier les zéros d'une fonction, plus précisément tenter de localiser les zéros d'une fonction, avant de les approcher numériquement en MNB.

Les développements limités mais surtout les formules de Taylor-Lagrange sont très utiles en MNB, puisqu'elles permettent de majorer les erreurs que l'on commet dans la théorie de l'interpolation et de l'intégration approchée ou de résolution numérique d'équations différentielles. Moyennant la majoration de $|f^{(n+1)}|$, on est capable, en utilisant (2.20), de majorer l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i$, c'est-à-dire :

$$E = \left| f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i \right|.$$

Voir les exercices de TD correspondant.

2.4. Dérivation par rapport à plusieurs variables

Cette section est directement issue de [Bas11b, Chapitre 2].

Traisons d'abord les deux exemples introductifs suivant :

EXEMPLE 2.12. On se donne $f(x) = x^2 + 2x^3$. Puisque $f'(x) = 2x + 6x^2$, on peut écrire selon (2.8a) et (2.8b),

$$(x+h)^2 + 2(x+h)^3 = x^2 + 2x^3 + h(2x + 6x^2) + h\varepsilon(h), \quad (2.21)$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (2.22)$$

On peut retrouver cela «à la main» :

$$\begin{aligned} (x+h)^2 + 2(x+h)^3 &= \underbrace{x^2 + 2x^3}_{f(x)} + \underbrace{h(2x + 6x^2)}_{\text{partie linéaire en } h} + \underbrace{h^2(1 + 3x)}_{\text{partie quadratique en } h} + \underbrace{2h^3}_{\text{partie cubique en } h}, \\ &= \underbrace{x^2 + 2x^3}_{f(x)} + \underbrace{h(2x + 6x^2)}_{\text{partie linéaire en } h} + \underbrace{h \times (h(1 + 3x) + 2h^2)}_{\text{partie d'ordre supérieur}}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\varepsilon(h) = h((1 + 3x) + 2h^2).$$

EXEMPLE 2.13. On se donne maintenant une fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^3.$$

Comme dans l'exemple 2.12, on écrit pour h_1 et h_2 quelconques :

$$g(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = x_1^2 + 2x_2^3 + 2x_1h_1 + 6x_2^2h_2 + h_1^2 + 6x_2h_2^2 + h_2^3.$$

On peut écrire, de façon analogue à l'exemple 2.12,

$$g(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = \underbrace{x_1^2 + 2x_2^3}_{g(x_1, x_2)} + \underbrace{2x_1h_1 + 6x_2^2h_2}_{\text{partie linéaire en } (h_1, h_2)} + \underbrace{h_1^2 + 6x_2h_2^2 + h_2^3}_{\text{partie d'ordre supérieur}}. \quad (2.23)$$

REMARQUE 2.14. Ceux qui connaissent les dérivées partielles, définies plus loin, auront remarqué que

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \\ 6x_2^2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} h_1^2 + 6x_2h_2^2 + h_2^3 &\leq (|h_1| + h_2)(|h_1| + 6x_2|h_2|h_2^2), \\ &\leq \sqrt{2}\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\varepsilon(h_1, h_2), \end{aligned}$$

où

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} \varepsilon(h_1, h_2) = 0.$$

Bref, on a montré qu'il existait a_1 et a_2 , dépendant de x_1 et de x_2 mais pas de h_1 et de h_2 tels que

$$g(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = g(x_1, x_2) + \underbrace{h_1a_1 + h_2a_2}_{\text{partie linéaire en } (h_1, h_2)} + \underbrace{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\eta(h_1, h_2)}_{\text{partie d'ordre supérieur}}, \quad (2.24)$$

où

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} \eta(h_1, h_2) = 0.$$

En généralisant ceci, on donne la notion⁷ de différentiabilité :

DÉFINITION 2.15. La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite différentiable en $x = (x_1, \dots, x_n)$ s'il existe a_1, a_2, \dots, a_n tels que

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \underbrace{a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n}_{\text{partie linéaire en } (h_1, h_2, \dots, h_n)} + \underbrace{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} \eta(h_1, h_2, \dots, h_n)}_{\text{partie d'ordre supérieur}}, \quad (2.26)$$

où

$$\lim_{(h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow 0} \eta(h_1, h_2, \dots, h_n) = 0. \quad (2.27)$$

REMARQUE 2.16. Cela est très proche de (2.8a) avec $n = 1$ et $a_1 = f'(a)$.

On fait le lien avec les dérivées partielles, qui généralisent les dérivées :

DÉFINITION 2.17. La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i en (x_1, \dots, x_n) si et seulement si, la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h}. \quad (2.28)$$

Dans ce cas, ce nombre est noté

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.29)$$

REMARQUE 2.18. Cela est très proche de (2.3) sauf que l'on a «bloqué» les variables $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

On a alors

PROPOSITION 2.19. Si f est différentiable en x , alors les dérivées partielles existent et on a

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) h_i + \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} \eta(h_1, h_2, \dots, h_n), \quad (2.30)$$

avec (2.27).

Plus difficilement, on peut montrer

THÉORÈME 2.20.

(1) Si les dérivées partielles de f existent et sont continues autour de x , alors f est différentiable en x .

(2) Si f est différentiable en x , alors les dérivées partielles de f existent en x .

7. Souvent, vous verrez

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n + \|(h_1, h_2, \dots, h_n)\| \eta(h_1, h_2, \dots, h_n), \quad (2.25)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur \mathbb{R}^n . Mais, toutes les normes sont équivalentes et par conséquent (2.25) et (2.26) sont équivalentes. Notez aussi qu'on parle de différentielle pour les applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

◇

En pratique, les fonctions seront suffisamment régulières.

Remarquons qu'en faisant le même abus de notations que dans (2.9), (2.30) s'écrirait, à l'ordre un,

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \approx f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) h_i, \quad (2.31)$$

ce qui constitue, comme dans (2.9), un développement limité à l'ordre un. Pour noter le caractère approximatif de (2.31) les physiciens notent souvent Δ_i les "petites" variations des variables x_i de sorte que (2.31) s'écrit

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta_i. \quad (2.32)$$

soit encore, si on note Δf , la "petite" variation de f , égale à $\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta_i. \quad (2.33)$$

Nous reviendrons sur cette égalité en section 2.5 en calcul d'incertitudes.

EXEMPLE 2.21. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} , définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = e^{-x-y} (x^2 + y^2).$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= e^{-x-y} (2x - x^2 - y^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= e^{-x-y} (2y - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

On se place par exemple en $X = (1/3, 1/3)$ et $X' = (8, 8)$. On a alors numériquement

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1/3, 1/3) &\approx 0,228 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1/3, 1/3) &\approx 0,228 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(8, 8) &\approx -1.260 \times 10^{-5} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(8, 8) &\approx -1.260 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Si on pose $h_1 = 0,001$ et $h_2 = 0,003$, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1/3, 1/3) \times h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1/3, 1/3) \times h_2 = 0,228 \times 0,001 + 0,228 \times 0,003,$$

soit numériquement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1/3, 1/3) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1/3, 1/3) h_2 \approx 9,127 \times 10^{-4}. \quad (2.34)$$

De même, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(8, 8) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(8, 8) h_2 \approx -5.041 \times 10^{-11}. \quad (2.35)$$

On peut aussi calculer

$$\begin{aligned} f(1/3, 1/3) &\approx 0.1140 \\ f(1/3 + h_1, 1/3 + h_2) &\approx 0.1150 \\ f(8, 8) &\approx 1.440 \times 10^{-5} \\ f(8 + h_1, 8 + h_2) &\approx 1.435 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

On peut donc constater empiriquement que (2.31) est vérifié puisque, selon (2.34) et (2.35),

$$\begin{aligned} f(1/3 + h_1, 1/3 + h_2) &\approx 0.1140 \text{ et } f(1/3, 1/3) + df(1/3, 1/3).(h_1, h_2) \approx 0.1149 \\ f(8 + h_1, 8 + h_2) &\approx 1.435 \times 10^{-5} \text{ et } f(8, 8) + df(8, 8).(h_1, h_2) \approx 1.4399 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Sur cet exemple, on voit aussi, en comparant les valeurs des dérivées partielles en $(1/3, 1/3)$ et $(8, 8)$ que, si les dérivées partielles sont plus petites, un accroissement égal des x_i provoque un accroissement de f plus faible.

Plus de détails pourront être trouvés dans [Bas11b, Chapitre 2] disponible sur <https://ce1.archives-ouvertes.fr/ce1-00555501/document>.

2.5. Incertitudes

Cette section est directement issue de [Bas11b, Chapitre 6].

2.5.1. Introduction

Une donnée physique, une mesure, un nombre sur un ordinateur, ne sont jamais connus avec une précision infinie. Ceci pour de multiples raisons : principe d'incertitude d'Heisenberg, erreur de mesure, représentation limitée des nombres en mémoire

On peut utiliser les probabilités pour traduire ce «flou», ce qu'on ne fera pas dans cette UV. On peut aussi utiliser la notion d'incertitude. Cette notion repose sur la notion de dérivée et de différentielle. Malheureusement, sur le plan mathématique, cette notion est assez vague mais elle peut être utilisée en physique.

Par exemple, en électricité supposons que l'on mesure une résistance R et l'intensité I qui la traverse. On suppose que la tension U au borne de cette résistance vérifie la loi d'Ohms :

$$U = RI. \quad (2.36)$$

Supposons que la résistance R soit connue avec une «incertitude» $\Delta R \geq 0$: cela signifie que la «vraie» valeur de la résistance R_0 est dans l'intervalle $[R - \Delta R, R + \Delta R]$, c'est-à-dire

$$R_0 \in [R - \Delta R, R + \Delta R]. \quad (2.37)$$

On suppose de même que l'intensité est connue avec une incertitude $\Delta I \geq 0$, c'est-à-dire

$$I_0 \in [I - \Delta I, I + \Delta I]. \quad (2.38)$$

On cherche alors l'ensemble des valeurs possibles prises par la «vraie» tension U_0 . Selon (2.36), (2.37) et (2.38), on a

$$U_0 \leq (R + \Delta R)(I + \Delta I),$$

et donc

$$U_0 \leq RI + R\Delta I + I\Delta R + (\Delta R\Delta I)^2.$$

On peut montrer de même⁸ que

$$U_0 \geq RI - R\Delta I - I\Delta R + (\Delta R\Delta I)^2.$$

On a donc

$$U_0 \in \left[U - R\Delta I - I\Delta R + (\Delta R\Delta I)^2, U + R\Delta I + I\Delta R + (\Delta R\Delta I)^2 \right]. \quad (2.39)$$

On supposera que les incertitudes ΔR et ΔI sont «petites», ce qui est légitimes. Si l'erreur dépasse 50%, cela n'est plus très raisonnable⁹! Ainsi, dans (2.39), nous négligerons¹⁰ le terme $(\Delta R\Delta I)^2$ d'ordre deux par rapport aux termes $R\Delta I$ et $I\Delta R$, d'ordre 2. On a donc

$$U_0 \in [U - R\Delta I - I\Delta R, U + R\Delta I + I\Delta R],$$

soit encore

$$U_0 \in [U - \Delta U, U + \Delta U], \quad (2.40)$$

avec

$$\Delta U = R\Delta I + I\Delta R. \quad (2.41)$$

L'objectif de ce chapitre est de donner des règles de calculs d'incertitude, similaires à ceux que l'on vient de faire, en s'appuyant sur la notion de dérivées et de dérivabilité.

2.5.2. Incertitudes absolues

DÉFINITION 2.22. Soit une grandeur X . On dit que X est connue avec l'incertitude $\Delta X \geq 0$ si la «vraie» valeur X_0 vérifie

$$\boxed{X_0 \in [X - \Delta X, X + \Delta X]}. \quad (2.42)$$

2.5.2.1. Incertitude pour une fonction d'une seule variable.

Supposons maintenant que l'on connaisse une grandeur x avec une incertitude $\Delta x \geq 0$. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; on s'intéresse à l'incertitude Δf de la grandeur $y = f(x)$.

On a alors la propriétés suivante, sous l'hypothèse habituellement et implicitement toujours faite¹¹ $f'(x) \neq 0$:

$$\boxed{\Delta f = |f'(x)| \Delta x}, \quad (2.43)$$

Cette équation sera d'autant plus précise que Δx est «petit».

Soit x_0 la vraie valeur de x et $y_0 = f(x_0)$ la vraie valeur de y . Appliquons la propriété (2.9) du chapitre 2, au «petit nombre» h tel que $|h| \leq \Delta x$:

$$f(x) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h. \quad (2.44)$$

On a donc (en notant $=$ à la place de \approx)

$$f(x) - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)h \quad (2.45)$$

On a donc, puisque $|x - x_0| = |h| \leq \Delta x$,

$$|y_0 - f(x)| \leq |f'(x_0)| |h| \leq |f'(x_0)| \Delta x.$$

On en déduit donc

$$y_0 \in [f(x) - |f'(x_0)| \Delta x, f(x) + |f'(x_0)| \Delta x].$$

Ainsi, l'incertitude Δf sur y est $|f'(x_0)| \Delta x$.

8. en supposant que $R - \Delta R > 0$ et $I - \Delta I > 0$.

9. Nous quittons largement le cadre rigoureux des mathématiques ...

10. comme on a déjà fait dans le chapitre 2.

11. sinon, il faudrait faire un raisonnement à l'ordre deux en utilisant $f''(x)$ non nul, ou utiliser la première dérivée non nulle si elle existe!

Parfois, on verra écrit en physique le raisonnement plus court (mais plus simple) suivant : dans (2.9), on choisit $h = \Delta x$ et donc

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x_0)\Delta x.$$

REMARQUE 2.23. Si f est une fonction affine, l'équation (2.43) est exacte puisque, dans ce cas, (2.44) est exacte.

2.5.2.2. Incertitude pour une fonction de plusieurs variables.

En fait, une grandeur dépend souvent de plusieurs autres grandeurs, et on utilise alors la notion de différentiabilité de la section 2.4.

Soit n un entier naturel. Supposons maintenant que l'on connaisse n grandeurs x_1, \dots, x_n avec n incertitudes $\Delta x_1 \geq 0, \dots, \Delta x_n \geq 0$. Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} ; on s'intéresse à l'incertitude Δf de la grandeur $y = f(x_1, \dots, x_n)$. On a alors la propriétés suivante :

$$\boxed{\Delta f \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right| \Delta x_i.} \quad (2.46)$$

La démonstration est identique à celle de (2.43). Au lieu d'écrire (2.44), on utilisera (2.31)

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i.$$

et on majorera en écrivant :

$$|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |h_i|.$$

Notons que, contrairement à (2.43), on a une majoration de l'incertitude (on se place dans le cas le plus défavorable).

2.5.2.3. Quelques exemples.

Voyons maintenant quelques exemples.

EXEMPLE 2.24. Reprenons l'exemple de la section 2.5.1, avec $U(R, I) = RI$. D'après (2.46), appliqué à $n = 2$, il vient

$$\Delta U \leq \left| \frac{\partial U}{\partial R} \right| \Delta R + \left| \frac{\partial U}{\partial I} \right| \Delta I.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R} &= I, \\ \frac{\partial U}{\partial I} &= R, \end{aligned}$$

il vient

$$\Delta U \leq I\Delta R + R\Delta I. \quad (2.47)$$

On retrouve donc (2.41).

EXEMPLE 2.25. On considère un gaz parfait vérifiant

$$PV = nRT, \quad (2.48)$$

et on étudie le volume qu'il occupe :

$$V(n, T, P) = \frac{nRT}{P}.$$

La constante R est connue avec une précision quasi-infinie et on suppose que l'on connaît les incertitudes Δn , ΔT et ΔP . On cherche à calculer l'incertitude sur le volume V .

D'après (2.46), appliqué à $n = 3$, il vient

$$\Delta V \leq \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \Delta n + \left| \frac{\partial V}{\partial T} \right| \Delta T + \left| \frac{\partial V}{\partial P} \right| \Delta P.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} &= \frac{RT}{P}, \\ \frac{\partial V}{\partial T} &= \frac{nR}{P}, \\ \frac{\partial V}{\partial P} &= -\frac{nRT}{P^2}, \end{aligned}$$

il vient

$$\Delta V \leq \frac{RT}{P} \Delta n + \frac{nR}{P} \Delta T + \frac{nRT}{P^2} \Delta P. \quad (2.49)$$

2.5.3. Incertitudes relatives

L'incertitude ΔX de la définition 2.22 est dite absolue. On donne alors la définition de l'incertitude relative :

DÉFINITION 2.26. Soit une grandeur X positive. L'incertitude relative sur X est égale à $(\Delta X)/X$.

Cette incertitude est sans dimension.

Reprenons l'exemple 2.25.

EXEMPLE 2.27. D'après (2.48) et (2.49), on a

$$\frac{\Delta V}{V} \leq \frac{RT}{P} \frac{P}{nRT} \Delta n + \frac{nR}{P} \frac{P}{nRT} \Delta T + \frac{nRT}{P^2} \frac{P}{nRT} \Delta P$$

soit

$$\frac{\Delta V}{V} \leq \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta P}{P}. \quad (2.50)$$

EXEMPLE 2.28. On montrera en TD (voir exercice 2.12 de TD) que, si l'on pose,

$$\mu = \frac{FL^3}{EI},$$

alors

$$\frac{\Delta \mu}{\mu} \leq \frac{\Delta F}{F} + 3 \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta I}{I}.$$

EXEMPLE 2.29. De façon plus générale, nous montrerons en TD (voir exercices 2.13 et 2.14 de TD) que si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont n réels, si (x_i) sont positifs strictement positifs, et si

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

alors

$$\frac{\Delta f}{f} \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \frac{\Delta x_i}{x_i}.$$

Intégration

3.1. Intégration (théorie)

Cette section est proposée dans l'annexe E.

3.2. Intégration (pratique)

Cette section est directement issu de [Bas22a, chapitre 4].

3.2.1. Références

On se pourra consulter <http://www.les-mathematiques.net/pages/deug.php>, référence issue de [CN03].

3.2.2. Intégration immédiate

On utilise les formules (E.16) et (E.17), ainsi que les primitives usuelles données en annexe C. Voir les exercices de TD correspondant.

3.2.3. Intégration par partie

Remarquant que

$$(uv)' = u'v + uv',$$

on a donc

$$u'v = (uv)' - uv',$$

et donc en prenant la primitive, on obtient la relation classique

$$\int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)dt. \quad (3.1)$$

Si on intègre entre a et b , on obtient

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt. \quad (3.2)$$

EXEMPLE 3.1. Pour calculer

$$F(t) = \int (\cos(t))t dt,$$

on pose

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos t, & u(t) &= \sin t, \\ v(t) &= t, & v'(t) &= 1, \end{aligned}$$

et donc, d'après (3.1),

$$F(t) = \int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t.$$

EXEMPLE 3.2. Pour calculer cette fois-ci :

$$I = \int_0^\pi (\cos(t))t dt,$$

On se sert du calcul précédent et on écrit

$$I = [t \sin t + \cos t]_0^\pi = \cos(\pi) - \cos(0) = -2.$$

On peut aussi poser

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos t, & u(t) &= \sin t, \\ v(t) &= t, & v'(t) &= 1, \end{aligned}$$

et donc, d'après (3.2),

$$F(t) = \int_0^\pi u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u(t)v'(t)dt = [t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt = 0 + [\cos(t)]_0^\pi = -2.$$

Voir les exercices de TD correspondant.

3.2.4. Changement de variable

On pourra consulter [Bas11a, sections 5.5 et 6.2].

3.2.4.1. *Premier sens : "ancienne" en fonction de la "nouvelle".*

On cherche à déterminer l'intégrale

$$I = \int_a^b f(u)du.$$

On pose

$$u = \phi(x), \tag{3.3}$$

où ϕ est une fonction connue. L'« ancienne variable » est u et la « nouvelle » est x . L'« ancienne variable » u disparaît au profit de la « nouvelle » variable x . Ainsi, l'ancienne variable u est connue explicitement en fonction de la nouvelle x . On procède donc aux trois substitutions suivantes :

- On remplace $f(u)$ par $f(\phi(x))$;
- Quand $u = a$ (resp. $u = b$), la nouvelle variable x vaut $\phi^{-1}(a)$ (resp. $\phi^{-1}(b)$). On remplace donc a et b par $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$; en pratique, on n'utilise pas nécessairement ϕ^{-1} : on cherche les bornes α et β de la nouvelle intégrale qui vérifient $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$.
- On a aussi

$$\frac{du}{dx} = \phi'(x)$$

et donc

$$du = \phi'(x)dx.$$

On remplace donc du par $\phi'(x)dx$.

Donc on écrit

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx. \tag{3.4}$$

REMARQUE 3.3. Autrement dit, on remplace l'intégrale $\int_a^b f(u)du$ par l'intégrale $\int_\alpha^\beta F(x)dx$, avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi^{-1}(a), \\ \beta &= \phi^{-1}(b), \\ F(x) &= f(\phi(x))\phi'(x). \end{aligned}$$

◇

EXEMPLE 3.4.

Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose $u = R \cos x$, c'est-à-dire, on choisit $\phi(x) = R \cos x$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x .

- On remplace donc $\sqrt{R^2 - u^2}$ par

$$\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} = R\sqrt{\sin^2 x} = R|\sin x|.$$

- On a

$$\frac{du}{dx} = -R \sin x,$$

et donc

$$du = -R \sin x dx.$$

On remplace donc du par $-R \sin x dx$.

- Quand $u = 0$, on a $x = \pi/2$ et quand $u = R$, on a $x = 0$; on remplace¹ donc 0 et R par $\pi/2$ et 0.

On a donc

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du = \int_{\pi/2}^0 R|\sin x| (-R \sin x) dx = R^2 \int_0^{\pi/2} |\sin x| \sin x dx = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx.$$

On linéarise (voir annexe I, proposition I.30 page 116) le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Après calculs, il vient

$$I_R = \frac{\pi}{4} R^2. \quad (3.5)$$

Dans cet exemple, on a remplacé l'ancienne variable u par la nouvelle variable x , grâce à une relation explicite (u est remplacé par $R \cos x$). On peut procéder dans l'autre sens comme le montre ce qui suit. Voir l'exemple 3.7.

3.2.4.2. *Second sens : "nouvelle" en fonction de l'"ancienne".*

On cherche à déterminer l'intégrale

$$I = \int_a^b f(u) du.$$

On pose

$$x = \phi(u),$$

où ϕ est une fonction connue. L'« ancienne variable » est u et la « nouvelle » est x . L'« ancienne variable » u disparaît au profit de la « nouvelle » variable x . Ainsi, la nouvelle variable x est connue explicitement en fonction de l'ancienne u . On a donc

$$u = \phi^{-1}(x), \quad (3.6)$$

On procède donc aux trois substitutions suivantes :

- On remplace $f(u)$ par $f(\phi^{-1}(x))$;
- Quand $u = a$ (resp. $u = b$), la nouvelle variable x vaut $\phi(a)$ (resp. $\phi(b)$). On remplace donc a et b par $\phi(a)$ et $\phi(b)$;
- On a aussi

$$\frac{dx}{du} = \phi'(u)$$

et donc²

$$du = \frac{dx}{\phi'(u)},$$

et donc, grâce à (3.6)

$$du = \frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \quad (3.7)$$

1. attention au sens.

2. avec un abus de notation.

On remplace donc du par $\frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}$.

On peut aussi de façon équivalente, utiliser la formule (2.11g) et écrire d'après (3.6)

$$\frac{du}{dx} = (\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}, \quad (3.8)$$

dont on déduit (3.7). \diamond

Donc on écrit

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x)) \frac{dx}{\phi'(\phi^{-1}(x))}. \quad (3.9)$$

REMARQUE 3.5. Autrement dit, on remplace l'intégrale $\int_a^b f(u)du$ par l'intégrale $\int_\alpha^\beta F(x)dx$, avec

$$\alpha = \phi(a),$$

$$\beta = \phi(b),$$

$$F(x) = \frac{f(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))}.$$

\diamond

REMARQUE 3.6. En fait, ce second changement de variable n'est pas toujours indiqué. Il se déduit du changement de variable 3.2.4.1 page 18 en remplaçant ϕ par ϕ^{-1} . On laisse au lecteur, vif, le soin de vérifier que, dans ce cas, (3.3) donne $u = \phi^{-1}(x)$ et donc (3.6). On a aussi (voir (2.11g))

$$(\phi^{-1})' = \frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}},$$

et donc, en remplaçant ϕ par ϕ^{-1} , (3.4) devient

$$\int_a^b f(u)du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1}(x)) \frac{1}{(\phi' \circ \phi^{-1})(x)} dx,$$

ce qui est bien : (3.9)

\diamond

EXEMPLE 3.7.

Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du.$$

On pose $x = \cos u$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x . La relation est cette fois-ci implicite : u est donné implicitement en fonction de x . On a donc $x = \phi(u)$ où $\phi = \cos$ (et donc $\phi^{-1} = \arccos$, mais qui n'est utile!).

- On a

$$\frac{dx}{du} = -\sin u$$

et donc

$$dx = -\sin u du.$$

On remplace donc $\sin u du$ par $-dx$.

- On remplace aussi $\cos^2 u$ par x^2 .
- Enfin, si $u = 0$, on a $x = \cos 0 = 1$ et si $u = \pi/2$, on a $x = \cos(\pi/2) = 0$.

Bref, on a donc

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du = \int_1^0 x^2 (-dx) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du = \frac{1}{3}. \quad (3.10)$$

3.2.4.3. Changement de variable pour une primitive.

Les techniques de changement de variables vues précédemment sont aussi valables pour un calcul de primitives ; on procèdera comme dans celui d'une intégrale, sans les bornes et on explicitera en fin de calcul, la nouvelle variable en fonction de l'ancienne. Il faudra bien vérifier les intervalles de définition des fonctions dépendant de l'ancienne ou de la nouvelle variable.

EXEMPLE 3.8.

Reprenons l'exemple 3.4 :

Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, la primitive

$$I_R = \int \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose $u = R \cos x$, c'est-à-dire, on choisit $\phi(x) = R \cos x$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x .

- On remplace donc $\sqrt{R^2 - u^2}$ par

$$\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} = R\sqrt{\sin^2 x} = R|\sin x|.$$

- On a

$$\frac{du}{dx} = -R \sin x,$$

et donc

$$du = -R \sin x dx.$$

On remplace donc du par $-R \sin x dx$.

On a donc

$$\int \sqrt{R^2 - u^2} du = - \int R |\sin x| (-R \sin x) dx = -R^2 \int |\sin x| \sin x dx = -R^2 \int \sin^2 x dx,$$

ce calcul étant valable sur un intervalle où $\sin x$ est positif. On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int \sqrt{R^2 - u^2} du &= R^2 \int \frac{1}{2}(-1 + \cos(2x)) dx, \\ &= \frac{R^2}{2} \int -1 + \cos(2x) dx, \\ &= \frac{R^2}{2} \left(-x + \frac{\sin(2x)}{2} \right). \end{aligned}$$

Il nous faut revenir à la variable u . Pour cela, on écrit ensuite

$$\begin{aligned} \int \sqrt{R^2 - u^2} du &= \frac{R^2}{2} (-x + \cos(x) \sin(x)), \\ &= -\frac{R^2}{2} x + \frac{1}{2} R \cos(x) R \sin(x), \end{aligned}$$

et puisqu'on se place sur un intervalle où \sin est positif :

$$\begin{aligned} &= -\frac{R^2}{2} x + \frac{1}{2} R \cos(x) R |\sin(x)|, \\ &= -\frac{R^2}{2} x + \frac{1}{2} R \cos(x) R \sqrt{\sin^2(x)}, \\ &= -\frac{R^2}{2} x + \frac{1}{2} R \cos(x) R \sqrt{1 - \cos^2(x)}, \\ &= -\frac{R^2}{2} x + \frac{1}{2} R \cos(x) \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2(x)}, \\ &= -\frac{R^2}{2} \arccos\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{1}{2} u \sqrt{R^2 - u^2}, \end{aligned}$$

si on est sur un intervalle où u est dans $[-R, R]$. On a donc

$$\int \sqrt{R^2 - u^2} du = -\frac{R^2}{2} \arccos\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{1}{2} u \sqrt{R^2 - u^2}.$$

On a donc, puisque u décrit un intervalle où les hypothèses faites sont valables :

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du, \\ &= \left[-\frac{R^2}{2} \arccos\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{1}{2} u \sqrt{R^2 - u^2} \right]_{u=0}^{u=R}, \\ &= \left(-\frac{R^2}{2} \arccos\left(\frac{R}{R}\right) + \frac{1}{2} R \sqrt{R^2 - R^2} \right) - \left(-\frac{R^2}{2} \arccos\left(\frac{0}{R}\right) + \frac{1}{2} 0 \times \sqrt{R^2 - 0^2} \right), \\ &= \left(-\frac{R^2}{2} \times 0 + \frac{1}{2} R \times 0 \right) + \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{2}, \\ &= \frac{R^2 \pi^2}{4}, \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat (3.5).

Il est donc bien plus simple de calculer l'intégrale que de passer par la primitive!

EXEMPLE 3.9.

Reprenons l'exemple 3.7.

Calculons la primitive

$$I = \int \cos^2 u \sin u du.$$

On pose $x = \cos u$. L'ancienne variable u disparaît au profit de la nouvelle variable x . La relation est cette fois-ci implicite : u est donné implicitement en fonction de x . On a donc $x = \phi^{-1}(u)$ où $\phi^{-1} = \cos$ (et donc $\phi = \arccos$, mais qui n'est utile!).

- On a

$$\frac{dx}{du} = -\sin u$$

et donc

$$dx = -\sin u du.$$

On remplace donc $\sin u du$ par $-dx$.

- On remplace aussi $\cos^2 u$ par x^2 .

Bref, on a donc

$$\int \cos^2 u \sin u du = \int x^2 (-dx) = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3}$$

et donc en remplaçant de nouveau x par $\cos u$, ici sans aucun problème d'intervalle :

$$\int \cos^2 u \sin u du = -\frac{1}{3} \cos^3(u).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du &= -\frac{1}{3} [\cos^3(u)]_{u=0}^{u=\pi/2}, \\ &= -\frac{1}{3} (0 - 1) &&= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

et on retrouve bien (3.10).

◇

Voir les exercices de TD correspondant.

◇

3.3. Intégration des fractions rationnelles et autres fonctions particulières

Section non traitée en cours, autrement que par des exemples. On consultera l'annexe G.

Voir les exercices de TD correspondant.

3.4. Et matlab symbolique ?

Comme beaucoup de langage, matlab sait calculer des intégrales.

EXEMPLE 3.10. On peut traiter l'exemple 3.7 de la façon suivante : Par exemple, si on tape

```
syms u ;
f=(cos(u))^2*sin(u);
a=0;
b=sym(pi)/2;
I=int(f,u,a,b);
Is=simple(I);
on obtient
```

$$I = 1/3.$$

EXEMPLE 3.11. De même, on peut traiter l'exemple 3.4 de la façon suivante : Par exemple, si on tape

```
syms u R;
f1=sqrt(R^2-u^2);
a1=0;
b1=R;
I=int(f1,u,0,R);
Is=simple(I);
on obtient
```

$$I = 1/4 R^2 \pi.$$

Pour les fans de L^AT_EX (dont je suis!), on peut taper aussi

```
lla=latex(Is);
```

ce qui nous donne directement le code L^AT_EX du résultat

```
1/4\,R\^2\pi .
```

EXEMPLE 3.12. On peut traiter des intégrales impropres. Par exemple, si on tape

```
syms u ;
f=exp(-u^2)
a=0;
b=inf;
I=int(f,u,a,b);
Is=simple(I);
on obtient
```

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 1/2 \sqrt{\pi}.$$

Naturellement, matlab a été programmé par des humains et il ne sera calculer que des intégrables exprimables, ce que vous êtes censés aussi savoir³ faire à la main !

3. en théorie, car, en pratique, le calcul symbolique sera bien utile !

Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants

4.1. Introduction

On se donne a , b et c trois réels (a étant non nul) . On commence dans ce chapitre, par le cas le plus simple, celui des équations différentielles du type

$$ay'(t) + by(t) = f(t),$$

avec la condition initiale à l'instant t_0

$$y(t_0) = y_0,$$

qui constituent les équations différentielles du premier ordre, à coefficients constants ou du type

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

avec les conditions initiales à l'instant t_0

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y'_0, \end{aligned}$$

qui constituent les équations différentielles du deuxième ordre, à coefficients constants. Voir les sections 4.2 et 4.3, qui constituent le chapitre 7 de [Bas11b]. On notera souvent ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} ay' + by &= f, \\ ay'' + by' + cy &= f. \end{aligned}$$

4.2. Équations différentielles d'ordre un

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $f : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t),} \tag{4.1a}$$

avec éventuellement la condition initiale

$$\boxed{y(t_0) = y_0.} \tag{4.1b}$$

Nous étudions d'abord en section 4.2.1 l'équation homogène associée (EHA) qui correspond à un second membre nul :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = 0. \tag{4.2}$$

Nous en déduisons ensuite en section 4.2.2 les solutions de (4.1a) et (4.1b).

4.2.1. Équation homogène associée

L'équation caractéristique associée à (4.2) est

$$ar + b = 0, \quad (4.3)$$

de solution $r = -b/a$. La solution de (4.2) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = Ce^{-bt/a}}, \quad (4.4)$$

où C est une constante.

Pour démontrer (et retrouver mnémotechniquement) cela, on écrit successivement, en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}, \\ &\iff (\ln(y))' = \left(-\frac{b}{a}t\right)', \\ &\iff \ln(y) = c - \frac{b}{a}t, \\ &\iff y = e^c e^{-bt/a}, \\ &\iff y = Ce^{-bt/a}, \end{aligned}$$

où $C = e^c$.

4.2.2. Équation avec second membre

Il existe deux méthodes, présentées en section 4.2.2.1 et 4.2.2.2.

4.2.2.1. Principe général (recherche d'une solution particulière).

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (4.1a) et de la solution générale de l'EHA (4.2), donnée par (4.4). On détermine ensuite la constante C d'intégration grâce à la condition initiale.

EXERCICE 4.1. Démontrer ce principe.

Pour déterminer une solution particulière de (4.1a), il existe des techniques propres à chaque type d'équation, qui ne fonctionnent pas toujours. Si cela échoue, on utilise la méthode de la section 4.2.2.2. Elle est fastidieuse mais fonctionne toujours, si bien sûr, l'équation possède une solution calculable à la main.

4.2.2.2. Variation de la constante.

On cherche y sous la forme donnée par (4.4)

$$y(t) = C(t)e^{-bt/a}, \quad (4.5)$$

où «la constante» C est considérée comme une fonction.

On a donc

$$y'(t) = C'(t)e^{-bt/a} - \frac{b}{a}C(t)e^{-bt/a}$$

Si on réinjecte cette expression dans (4.1a), il vient

$$\begin{aligned} f(t) &= ay'(t) + by(t), \\ &= a \left(C'(t)e^{-bt/a} - \frac{b}{a}C(t)e^{-bt/a} \right) + bC(t)e^{-bt/a}, \\ &= aC'(t)e^{-bt/a} - bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}, \\ &= aC'(t)e^{-bt/a} + \underbrace{(-bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a})}_{\text{quantité nulle}}. \end{aligned}$$

REMARQUE 4.2. C'est la nullité de $-bC(t)e^{-bt/a} + bC(t)e^{-bt/a}$ qui fait fonctionner le calcul. Si vous ne pouvez faire cette simplification, c'est probablement qu'il y a une erreur quelque part !

On a donc, par division par $ae^{-bt/a}$

$$\boxed{C'(t) = \frac{1}{a}e^{bt/a}f(t)}, \quad (4.6)$$

ce qui permet de déterminer la fonction C (avec une constante d'intégration). Ainsi, y est entièrement définie par (4.5). La constante d'intégration est alors déterminée par la condition initiale (4.1b).

4.2.3. Équations différentielles d'ordre un linéaire avec a et b dépendant du temps.

On peut tout à fait résoudre l'équation (4.1a) où on considère les coefficients variables. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, a et b , f des fonction continues de $[t_0, +\infty[$ dans \mathbb{R} a ne s'annulant pas sur $[t_0, +\infty[$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\boxed{\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)}, \quad (4.7)$$

avec éventuellement la condition initiale

$$\boxed{y(t_0) = y_0}. \quad (4.8)$$

La technique de résolution est tout à fait identique.

Comme dans la section 4.2.1, on résoud d'abord l'équation homogène associée :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad a(t)ty'(t) + b(t)y(t) = 0. \quad (4.9)$$

La solution de (4.9) s'écrit donc

$$\boxed{y(t) = Ce^{-\alpha(t)}}, \quad (4.10)$$

où

$$\boxed{\alpha \text{ est une primitive quelconque de la fonction } b/a}. \quad (4.11)$$

où C est une constante.

Pour démontrer (et retrouver mnémotechniquement) cela, on écrit successivement, en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}, \\ &\iff (\ln |y|)' = (-\alpha)', \\ &\iff \ln(y) = c - \alpha, \\ &\iff y = e^{c-\alpha}, \\ &\iff y = e^c e^{-\alpha}, \\ &\iff y = Ce^{-\alpha}, \end{aligned}$$

où $C = e^c$.

On utilise ensuite, soit la méthode de la recherche de la solution particulière comme dans la section 4.2.2.1 soit la variation de la constante, comme dans la section 4.2.2.2.

- (1) La solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de (4.7) et de la solution générale de l'EHA (4.9), donnée par (4.10). On détermine ensuite la constante C d'intégration grâce à la condition initiale.
- (2) On cherche y sous la forme donnée par (4.10)

$$y(t) = C(t)e^{\alpha(t)}, \quad (4.12)$$

où «la constante» C est considérée comme une fonction.

On a donc

$$y'(t) = C'(t)e^{\alpha(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}C(t)e^{\alpha(t)}.$$

Si on réinjecte cette expression dans (4.7), il vient

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t)y'(t) + b(t)y(t), \\ &= a(t) \left(C'(t)e^{\alpha(t)} - \frac{b(t)}{a(t)}C(t)e^{\alpha(t)} \right) + b(t)C(t)e^{\alpha(t)}, \\ &= a(t)C'(t)e^{\alpha(t)} - b(t)C(t)e^{\alpha(t)} + b(t)C(t)e^{\alpha(t)}, \\ &= a(t)C'(t)e^{\alpha(t)} + \underbrace{(-b(t)C(t)e^{\alpha(t)} + b(t)C(t)e^{\alpha(t)})}_{\text{quantité nulle}}. \end{aligned}$$

On a donc, par division par $a(t)e^{\alpha(t)}$

$$\boxed{C'(t) = \frac{1}{a(t)}e^{-\alpha(t)}f(t)}, \quad (4.13)$$

ce qui permet de déterminer la fonction C (avec une constante d'intégration). Ainsi, y est entièrement définie par (4.12). La constante d'intégration est alors déterminée par la condition initiale (4.8).

◇

4.2.4. Preuves théoriques

Voir [Bas22a, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur <http://utbmjb.cherz-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf>.

De cette section, on peut retenir les résultats rappelés ici : les solutions de (4.1a) sont données par : il existe une constante c telle que

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = ce^{-bt/a} + \frac{1}{a} \int_{t_0}^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u) du. \quad (4.14)$$

Si on prend en compte la condition initiale (4.1b), on a

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(t-t_0)} + \frac{1}{a} \int_{t_0}^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u) du. \quad (4.15)$$

Cette méthode qui repose sur une formule est théorique et sera parfois utilisée dans ce cours, mais non exigible! ◇

Ces formules se généralisent aussi dans le cas de la section 4.2.3. ◇

4.2.5. Exemples

EXEMPLE 4.3. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \quad (4.16a)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 2. \quad (4.16b)$$

La solution générale de l'équation homogène associée

$$y'(t) + 2y(t) = 0,$$

est donnée par

$$y(t) = Ce^{-2t}, \quad (4.17)$$

où C est un réel.

Nous proposons trois méthodes de résolution.

(1) Cherchons une solution particulière sous la forme $\hat{y}(t) = Ke^{-t}$ où K est un réel. D'après (4.16a), on a

$$-Ke^{-t} + 2Ke^{-t} = e^{-t},$$

et donc $K = 1$. On a donc

$$\hat{y}(t) = e^{-t}. \quad (4.18)$$

On ajoute à cela la solution donnée par (4.17) et il vient donc

$$y(t) = Ce^{-2t} + e^{-t}, \quad (4.19)$$

où C est un réel.

- (2) Si on utilise la technique de la section 4.2.2.2, compte tenu de (4.17), on fait varier C et il vient

$$y' = C'e^{-2t} - 2Ce^{-2t},$$

ce qui donne, réinjecté dans (4.16a)

$$C'e^{-2t} - 2Ce^{-2t} + 2Ce^{-2t} = e^{-t},$$

et donc

$$C'e^{-2t} = e^{-t},$$

soit encore

$$C' = e^{2t}e^{-t} = e^t.$$

Ainsi, par intégration

$$C = e^t + C_0,$$

où C_0 est un réel et donc, d'après (4.17),

$$y(t) = (e^t + C_0)e^{-2t} = e^{-t} + C_0e^{-2t},$$

et l'on retrouve donc bien (4.19).

Finalement, que l'on utilise l'une ou l'autre des deux premières méthodes, on a donc la solution générale sous la forme

$$y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t}.$$

La condition initiale (4.16b) donne donc

$$2 = e^0 + Ce^0 = 1 + C,$$

et donc $C = 1$ et la solution cherchée et donc donnée par

$$y(t) = e^{-t} + e^{-2t}. \quad (4.20)$$

- (3) Si on utilise directement la formule (4.15), on a directement avec $t_0 = 0$, $y_0 = 2$, $a = 1$, $b = 2$ et $f(t) = e^{-t}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2e^{-2t} + \int_0^t e^{2(u-t)}e^{-u}du, \\ &= 2e^{-2t} + e^{-2t} \int_0^t e^u du, \\ &= 2e^{-2t} + e^{-2t} [e^u]_0^t, \\ &= 2e^{-2t} + e^{-2t} (e^t - 1), \\ &= 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t}, \\ &= e^{-2t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

ce qui est bien (4.20). \diamond

EXEMPLE 4.4. Traiter l'exercice corrigé suivant (extrait de [Bas22b, TD intitulé "Équations différentielles ordinaires"]).

Énoncé

On étudie l'équation différentielle

$$-y'(t) + 2y(t) = 1 + t + t^2.$$

- (1) Résoudre cette équation différentielle en :

(a) cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme ;

- (b) utilisant la méthode de la variation de la constante.
- (2) Comparer les deux solutions obtenues aux questions (1a) et (1b) et conclure.
- (3) Définir la solution correspondant à la condition initiale $y(1) = 2$.

Corrigé

- (1) (a) La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle de l'énoncé est donnée par

$$y_g(t) = Ce^{2t}, \quad (4.21)$$

où C est une constante.

Pour résoudre l'équation différentielle de l'énoncé en cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme, on choisit ce polynôme du second degré sous la forme

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C,$$

que l'on réinjecte dans l'équation différentielle de l'énoncé, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 &= -y_p'(t) + 2y_p(t), \\ &= -(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C), \\ &= 2At^2 + (2B - 2A)t + 2C - B, \end{aligned}$$

ce qui fournit, par identification des deux polynômes, le système (triangulaire) de trois équations linéaires en A , B et C que l'on résout facilement. On obtient

$$\begin{aligned} A &= 1/2, \\ B &= 1, \\ C &= 1, \end{aligned}$$

et donc

$$y_p(t) = 1/2 t^2 + t + 1. \quad (4.22)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle de l'énoncé est donnée par la somme de (4.21) et (4.22), soit

$$y(t) = Ce^{2t} + (1/2 t^2 + t + 1), \quad (4.23)$$

où C est une constante.

- (b) Pour résoudre l'équation différentielle de l'énoncé en utilisant la variation de la constante, on dérive (4.21) en supposant que C devient une fonction. On a donc

$$y(t) = C(t)e^{2t}, \quad (4.24)$$

et donc

$$y'(t) = C'(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t},$$

et donc, d'après (4.24), il vient en réinjectant tout cela dans l'équation différentielle de l'énoncé :

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 &= -(C'(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t}) + 2C(t)e^{2t}, \\ &= -C'(t)e^{2t} - 2C(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t}, \end{aligned}$$

ce qui fournit donc

$$-C'(t)e^{2t} = 1 + t + t^2,$$

et donc

$$C'(t) = -e^{-2t} (1 + t + t^2). \quad (4.25)$$

On peut donc écrire, en prenant par exemple la primitive du second membre de (4.25) qui s'annule en $t = 0$:

$$C(t) = c - \int_0^t (1 + u + u^2) e^{-2u} du, \quad (4.26)$$

où c est une "vraie" constante. On calcule l'intégrale de cette équation en faisant une double intégration par partie, pour abaisser le degré polynôme qui est devant l'exponentielle et on obtient

$$\int_0^t (1 + u + u^2) e^{-2u} du = 1 - e^{-2t} - e^{-2t}t - 1/2 e^{-2t}t^2, \quad (4.27)$$

et donc, d'après (4.26)

$$C(t) = c - 1 + e^{-2t} + e^{-2t}t + 1/2 e^{-2t}t^2,$$

et, en réinjectant dans (4.24), on obtient

$$y(t) = (c - 1 + e^{-2t} + e^{-2t}t + 1/2 e^{-2t}t^2) e^{2t},$$

ce qui donne :

$$y(t) = ce^{2t} - e^{2t} + 1 + t + 1/2 t^2. \quad (4.28)$$

où c est une constante et donc

$$y(t) = (c - 1)e^{2t} + 1 + t + 1/2 t^2. \quad (4.29)$$

- (2) Si on compare les deux solutions obtenues aux questions (1a) et (1b), définies par (4.23) et (4.29), elles semblent être *a priori* différentes. La constante $c - 1$ de (4.29) peut être renommée C et on obtient donc bien la solution donnée par (4.23) (où C est une constante).

REMARQUE 4.5. Notons que, comme dans la question (1b), l'expression de y donnée par (4.28) fait apparaître y comme la somme de deux termes :

- ce^{2t} qui est la solution générale de l'EHA (donnée par (4.21))
- $-e^{2t} + 1 + t + 1/2 t^2$, qui est une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé.

Une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé est aussi donnée par $1 + t + 1/2 t^2$ puisque $-e^{2t}$ est solution de l'EHA! Autrement dit, on retrouve aussi la solution donnée par (4.23) (où C est une constante). Bref, la méthode de la variation de la constante fournit des solutions particulières, "à une exponentielle près", elle-même solution de l'EHA.

- (3) Si on considère y défini par (4.23) et qu'on écrit la condition initiale de l'énoncé, on obtient

$$2 = y(1) = Ce^2 + (5/2),$$

et donc

$$C = (2 - 5/2)e^{-2} = -\frac{1}{2}e^{-2},$$

et donc

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{2(t-1)} + (1/2 t^2 + t + 1),$$

Définir la solution correspondant à la condition initiale $y(1) = 2$. Si on utilisait l'expression donnée par (4.29), on aurait naturellement exactement la même expression !

EXEMPLE 4.6. On s'intéresse à un circuit électrique constitué d'une inductance et d'une résistance et soumis à une tension $e(t)$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad L \frac{di}{dt} + Ri = e. \quad (4.30)$$

On suppose que

$$i(0) = 0, \quad (4.31)$$

et que $e(t)$ est un échelon de tension :

$$e(t) = E_0 Y(t), \quad (4.32)$$

où E_0 est une constante et Y est définie par

$$Y_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Une solution particulière de (4.30) est donnée par $Ri = E_0$ (c'est-à-dire la solution correspondant au régime stationnaire). D'après la méthode de la section 4.2.2.1, on a, après calculs,

$$i(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (4.34)$$

où le temps caractéristique τ est défini par

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (4.35)$$

EXEMPLE 4.7. Étudions de nouveau l'équation différentielle (4.30) et (4.31) de l'exemple 4.6 où e n'est plus un échelon mais est défini par

$$e(t) = E \cos(\omega t). \quad (4.36)$$

On pose

$$F = \frac{E}{L}. \quad (4.37)$$

Proposons trois méthodes :

- (1) La méthode de la variation de la constante 4.2.2.2 donne après calculs

$$i(t) = C(t)e^{-t/\tau} \quad (4.38)$$

où τ est défini par (4.35) et

$$C'(t) = Fe^{t/\tau} \cos(\omega t). \quad (4.39)$$

Pour intégrer, on a deux façons de procéder.

- (a) On écrit

$$C(t) = C_0 + F \int e^{t/\tau} \cos(\omega t) dt,$$

où C_0 est la constante d'intégration et donc

$$C(t) = C_0 + FI, \quad (4.40)$$

où

$$I = \int e^{t/\tau} \cos(\omega t) dt. \quad (4.41)$$

On peut calculer cette primitive grâce à deux intégrations par partie. La première fournit

$$I = \tau\omega \int e^{t/\tau} \sin(\omega t) dt + \tau e^{t/\tau} \cos(\omega t).$$

Puis, une seconde fournit successivement :

$$\begin{aligned} I &= \tau\omega \left(-\tau\omega \int e^{t/\tau} \cos(\omega t) dt + \tau e^{t/\tau} \sin(\omega t) \right) + e^{t/\tau} \cos(\omega t), \\ &= -\tau^2\omega^2 I + \tau^2\omega e^{t/\tau} \sin(\omega t) + \tau e^{t/\tau} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(1 + \tau^2\omega^2)I = \tau e^{t/\tau} (\tau\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)),$$

et donc

$$I = \frac{\tau e^{t/\tau}}{1 + \tau^2\omega^2} (\tau\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)),$$

soit

$$I = \frac{e^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\omega \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau} \right). \quad (4.42)$$

On obtient donc grâce à (4.40), (4.41) et (4.42)

$$C(t) = \frac{F e^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) \right) + C_0. \quad (4.43)$$

(b) Un peu plus rapidement, on peut aussi passer en complexe : on écrit

$$C'(t) = F \operatorname{Re} \left(e^{t/\tau} e^{i\omega t} \right), \quad (4.44)$$

soit

$$C'(t) = F \operatorname{Re} \left(e^{\alpha t} \right), \quad (4.45)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\tau} + i\omega. \quad (4.46)$$

Si \mathcal{C} vérifie

$$\mathcal{C}'(t) = F e^{\alpha t/\tau}, \quad (4.47)$$

nous n'aurons plus qu'à calculer alors

$$C(t) = \operatorname{Re} (\mathcal{C}(t)). \quad (4.48)$$

Intégrons (en complexe) (4.47) qui fournit

$$\mathcal{C}(t) = C_0 + \frac{F}{\alpha} e^{\alpha t/\tau},$$

où C_0 est un nombre complexe et donc

$$\mathcal{C}(t) = C_0 + \frac{F(\frac{1}{\tau} - i\omega)}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} e^{t/\tau} e^{i\omega t}.$$

On a donc

$$C(t) = \operatorname{Re} \left(C_0 + \frac{F(\frac{1}{\tau} - i\omega)}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} e^{t/\tau} e^{i\omega t} \right),$$

En reprenant la partie réelle de cette expression, on obtient

$$C(t) = C_0 + \frac{F e^{t/\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) \right).$$

où $C_0 = \operatorname{Re}(C_0)$, est une constante, ce qui est bien (4.43).

Finalement, de (4.38) et (4.43), on tire

$$i(t) = \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) \right) + C_0 e^{-t/\tau}. \quad (4.49)$$

où la constante C_0 est déterminée grâce à la valeur initiale nulle de i . On écrit en effet $i(0) = 0$, ce qui donne

$$\frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \right) + C_0 = 0.$$

dont on déduit la valeur de C_0 :

$$C_0 = -\frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \frac{1}{\tau}.$$

Si on réinjecte cette expression dans (4.49), on a

$$i(t) = \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\tau} + \omega \sin(\omega t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right). \quad (4.50)$$

- (2) En fait, la méthode de la section 4.2.2.1 est encore plus rapide, comme précédemment annoncé. Elle donne

$$i(t) = C_0 e^{-t/\tau} + i_p(t). \quad (4.51)$$

où τ est défini par (4.35) et i_p est une solution particulière de (4.30)-(4.36). On cherche alors une solution particulière i_p sous la forme

$$i_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

On la réinjecte dans (4.30)-(4.36) et on obtient

$$E \cos(\omega t) = L(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) + RA \cos(\omega t) + RB \sin(\omega t)$$

et donc

$$E \cos(\omega t) = (LB\omega + RA) \cos(\omega t) + (RB\omega - A\omega L) \sin(\omega t).$$

Pour cela, il suffit (et il faut en fait) que les termes en cos et sin soient identiques de chaque côté et donc que

$$\begin{aligned} RA + LB\omega &= E, \\ RB - AL\omega &= 0, \end{aligned}$$

système linéaire à deux équations, qu'on résoud très simplement ici : la seconde équation donne

$$A = \frac{RB}{L\omega}, \quad (4.52)$$

que l'on réinjecte dans la première :

$$\frac{R^2 B}{L\omega} + LB\omega = E,$$

et donc

$$\begin{aligned} B &= \frac{E}{\frac{R^2}{L\omega} + L\omega}, \\ &= \frac{\frac{E}{L}\omega}{\frac{R^2}{L} + L\omega^2}, \end{aligned}$$

encore donné, en utilisant (4.35) et (4.37), par

$$B = \frac{F\omega}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}. \quad (4.53)$$

De (4.52), on déduit alors

$$A = \frac{\frac{1}{\tau} F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}. \quad (4.54)$$

De (4.53) et (4.54), on déduit alors

$$i_p(t) = \frac{\frac{1}{\tau} F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{F\omega}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \sin(\omega t).$$

et donc grâce à (4.51), on retrouve exactement (4.49). La constante C_0 est déterminée grâce à la valeur initiale nulle de i comme précédemment.

- (3) Si on utilise directement la formule (4.15), on a directement avec $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = L$, $b = R$ et $f(t) = E \cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}(u-t)} E \cos(\omega u) du, \\ &= e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{u}{\tau}} E \cos(\omega u) du, \\ &= F e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{u}{\tau}} \cos(\omega u) du, \end{aligned}$$

en utilisant le calcul déjà fait par l'un ou l'autre des deux méthodes présentées ci-dessus (voir les points 1a ou 1b), on déduit de (4.42) :

$$\begin{aligned} &= Fe^{-\frac{t}{\tau}} (I(t) - I(0)) du, \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} Fe^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{t/\tau} \left(\omega \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau} \right) - \frac{1}{\tau} \right), \\ &= \frac{F}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\omega \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\tau} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \end{aligned}$$

ce qui est bien (4.50). \diamond

Analysons l'expression de $i(t)$ donnée par (4.49). On peut remarquer que i est la somme de deux termes i_1 et i_2 (on retrouve en fait les calculs du point 2) définis par

$$i_1(t) = C_0 e^{-t/\tau}, \quad (4.55)$$

$$i_2(t) = \frac{F}{1/\tau^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right). \quad (4.56)$$

Le terme i_1 est en fait la solution générale de l'EHA associée à (4.30) et donc i_2 en est une solution particulière. Remarquons que i_1 tend vers zéro quand t tend vers l'infini ; les électriciens disent en fait qu'au bout d'un temps égal au temps caractéristique τ , i_1 est quasiment nul. Ainsi, pour t «grand» on a

$$i(t) \approx i_2(t) = \frac{F}{1/\tau^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right). \quad (4.57)$$

On retrouve le régime stationnaire du circuit électrique, fonctionnant alors en régime périodique de pulsation ω .

On pourrait mettre i dans (4.57) sous la forme

$$i_2(t) = I \cos(\omega t + \phi),$$

et retrouver ainsi I et le déphasage ϕ , que l'on aurait pu aussi retrouver par les calculs d'impédances complexes, comme le montre la remarque suivante :

REMARQUE 4.8. L'équation différentielle (4.30) avec (4.36) est réécrite en régime périodique

$$L \frac{d\mathcal{I}}{dt} + R\mathcal{I} = E \cos(\omega t). \quad (4.58)$$

et en posant

$$\mathcal{I} = I e^{i\omega t} \quad (4.59)$$

où I est complexe. Puisque

$$\frac{d}{dt} (I e^{i\omega t}) = I i\omega e^{i\omega t},$$

(4.58) fournit donc

$$L I i\omega e^{i\omega t} + R I e^{i\omega t} = E e^{i\omega t}$$

et donc

$$L I i\omega + R I = E,$$

soit

$$I = \frac{E}{R + L i\omega},$$

que l'on calcule de façon classique :

$$\begin{aligned} \frac{E}{R + L i\omega} &= E \frac{R - L i\omega}{R^2 + L^2 \omega^2}, \\ &= E \frac{\frac{R}{L} - i\omega}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}, \\ &= \frac{E}{L} \frac{\frac{R}{L} - i\omega}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2}, \\ &= \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (4.59)

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= e^{i\omega t} \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right), \\ &= (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right), \end{aligned}$$

et si on reprend la partie réelle, on a donc

$$i(t) = \frac{F}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right),$$

ce qui est bien identique à (4.57).

4.3. Équations différentielles d'ordre deux

Voir [Bas22a, chapitre 7, section 7.3] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf>

4.4. Lien avec MNB

Dans le cours de MNB, des méthodes seront proposées pour résoudre numériquement les équations différentielles vues dans ce chapitre.

4.5. Application en utilisation en DDRS

Quelques équations différentielles à coefficients constants seront utilisées, entre autres, dans un cours de DDRS plus tard dans l'année. Voir [Bas24a ; Bas24b ; Bas24c].

4.6. Et matlab symbolique ?

Comme beaucoup de langage, matlab sait aussi résoudre des équations différentielles, quand elles ont des solutions explicites !

On veut résoudre

$$\begin{aligned} 2y'' + 5y' - 3y &= 0, \\ 2y'' + 5y' - 3y &= t^3 + t^2 - 1. \end{aligned}$$

On écrit successivement :

```
dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=0'),
dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=t^3+t^2-1')
```

On peut aussi rajouter des conditions aux limites : par exemple, pour traiter la dernière équation différentielle avec

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -8,$$

on écrira

```
dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=t^3+t^2-1', 'y(0)=1', 'Dy(0)=-8'),
```

On peut aussi écrire pour que l'affichage soit plus beau :

```
pretty(dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=t^3+t^2-1', 'y(0)=1', 'Dy(0)=-8')) ,
```

Dans un premier temps, on résout l'équation différentielle :

$$v''(x) + \omega_0^2 v(x) = K \sin(\omega x),$$

en tapant sous matlab

```
pretty ( dsolve ( 'D2y+omega0^2*y=K*sin (omega*x) ', 'x' ) ) ,
```

On prend ensuite en compte les conditions initiales

$$v(0) = v(L) = 0,$$

en tapant sous matlab :

```
pretty ( dsolve ( 'D2y+omega0^2*y=K*sin (omega*x) ', 'y(0)=0 ', 'y(L)=0 ', 'x' ) ) ,
```

On pourra ensuite résoudre l'équation différentielle avec $\omega_0 = \omega$:

$$v''(x) + \omega^2 v(x) = K \sin(\omega x), \quad (4.60)$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = v(L) = 0. \quad (4.61)$$

On pourra aussi s'intéresser à la solution de l'équation différentielle (4.60)-(4.61) avec $L = \pi/\omega$ où K est quelconque puis quand $L = \pi/\omega$ et $K = 0$.

Analyse dimensionnelle

Voir l'extrait suivant qui résume tout (provient vient de <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/SIunits/SIunits.pdf>)¹

"Any SI derived quantity Q can be expressed in terms of the SI base quantities length (l), mass (m), time (t), electric current (I), thermodynamic temperature (T), amount of substance (n), and luminous intensity (I_v) by an equation of the form

$$Q = l^\alpha m^\beta t^\gamma I^\delta T^\eta n^\zeta I_v^\varepsilon \sum_{k=1}^N a_k. \quad (5.1)$$

where the exponents $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \zeta$ and ε are numbers and the factors a_k are also numbers. The dimension of Q is defined to be

$$Q = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\eta N^\zeta J^\varepsilon. \quad (5.2)$$

where L, M, T, I, Θ , N and J, are the dimensions of the SI base quantities length, mass, time, electric current, thermodynamic temperature, amount of substance, and luminous intensity, respectively². The exponents α, β, \dots are called "dimensional exponents". The SI derived unit of Q is

$$m^\alpha \text{kg}^\beta \text{s}^\gamma \text{A}^\delta \text{K}^\eta \text{mol}^\zeta \text{cd}^\varepsilon \quad (5.3)$$

which is obtained by replacing the dimensions of the SI base quantities in the dimension of Q with the symbols for the corresponding base units.

EXEMPLE 5.1. Consider a nonrelativistic particle of mass m in uniform motion which travels a distance l in a time t . Its velocity is $v = l/t$ and its kinetic energy is $E_K = mv^2/2 = l^2mt^{-2}/2$. The dimension of E_K is $\dim E_K = \text{LM}^2\text{T}^{-2}$ and the dimensional exponents are 2, 1, and -2 .

"

On précise que le SI (Système International d'Unités) a été adopté par la Conférence Générale des Poids et des Mesures³ en 1960.

En théorie, une analyse dimensionnelle doit utiliser le formalisme (5.2) mais l'usage est consacré à utiliser plutôt (5.3).

Les sept unités de base citées ci-dessus permettent donc de décomposer toutes les autres grandeurs.

Certaines unités ont été créées mais restent exprimables à partir de ces unités fondamentales. Pour retrouver les unités, il convient d'utiliser de formules permettant de retrouver les grandeurs associées. Voir les exemples suivant.

EXEMPLE 5.2. La vitesse est le rapport d'une distance par un temps et s'exprime donc en m/s, noté aussi m s^{-1} .

1. document fait pour expliquer l'usage des unités en L^AT_EX, mais qui résume beaucoup de choses très bien.
 2. c'est-à-dire donc masse, temps, intensité électrique, température thermodynamique, quantité de matière et intensité lumineuse.
 3. On cite cette conférence en français, dans le monde! De même que le sigle "TIR", apposé à l'arrière des poids lourds!

EXEMPLE 5.3. Une force s'exprime en N qui correspondent à des m kg s^{-2} . On peut écrire par exemple que le poids d'un objet vaut $P = mg$. La masse s'exprime en kg et g , homogène à une accélération, s'exprime en m s^{-2} .

EXEMPLE 5.4. En reprenant l'exemple 5.1, le Joule, unité des énergies, noté J correspond à des $\text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$.

On pourra consulter aussi https://fr.wikipedia.org/wiki/Unité_fondamentale

Voir les exercices du TD correspondant.

Chute libre

Ce chapitre est directement issu de [Bas18b, chapitre 8], disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/coursL2biomeca.pdf>

On pourra aussi consulter l'annexe H qui contient les principales formules de la chute libre, ainsi que le corrigé de TD 8 de [Bas17].

On pourra aussi consulter le chapitre 4 de [Bas18a].

6.1. Introduction sur la modélisation de la chute libre

Quand on étudie un système mécanique soumis à la gravitation terrestre, des tas de forces autres que la gravitation entrent en jeu : les forces de frottement de l'air (parachute), la force de l'attraction lunaire (les marées), la force de Coriolis (due à la rotation de la terre) ... Si le mouvement étudié est long, la variation de la gravitation terrestre peut aussi avoir une influence (étude du mouvement de satellites ou de planètes).

Nous allons prendre le cas le plus simple où seule la force de la gravitation terrestre est prise en compte ; valable pour des objets qui ne présentent pas trop de « prise au vent » (comme une feuille de papier) et pour des durées brèves, de telle sorte que l'on puisse négliger les frottements de l'air.

Nous ferons aussi l'hypothèse fondamentale que le repère considéré est galiléen. En théorie, cette hypothèse, sur terre, est vraie pour de faibles amplitudes de durée de mouvement.

Voir par exemple la figure 1(a) page suivante qui représente la chute libre d'un sportif équipé d'un wingsuit où sont tracés la trajectoire en prenant ou non en compte la chute libre. Les deux trajectoires sont très proches (voir section 6.8). En revanche, si l'on étudie la trajectoire complète, on observe une trajectoire très différente de celle de la chute libre sans frottement (voir figure 1(b)).

On pourra consulter la section 6.8 page 47 pour voir des exemples où les frottements de l'air ne sont ni négligeables ni négligés. De toute façon, même la prise en compte des frottements est problématique, puisque la modélisation est en effet très simplifiée par rapport à la complexité du réel!

Avant de commencer les calculs, on pourra étudier l'exemple interactif, donné sous Géogébra (attendre que la feuille qui apparaît devienne interactive) :

<https://www.geogebra.org/m/PhfX4tXN>

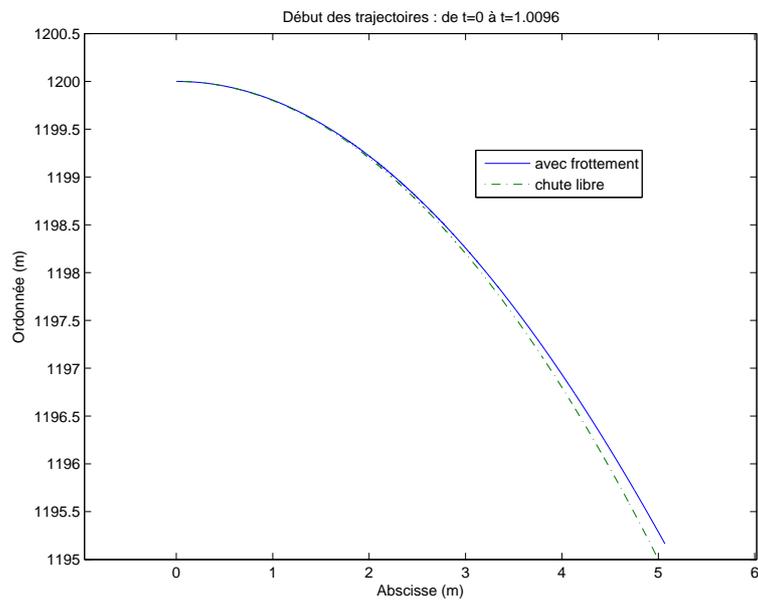
Pour toute la suite, on s'intéresse *au mouvement du centre de gravité* du système étudié.

6.2. Détermination géométrique de la parabole

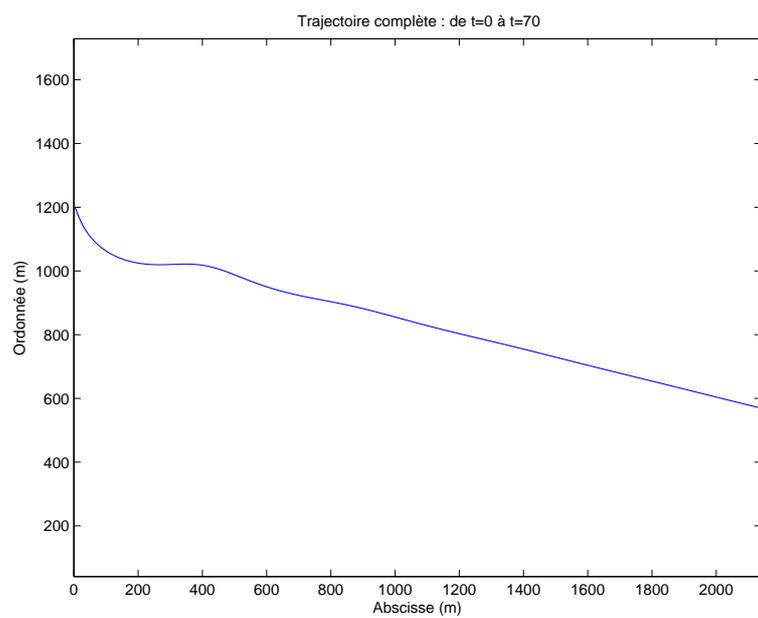
Voir [Bas18b, Annexe G "Détermination géométrique de la parabole de la chute libre"]. On pourra en particulier regarder le très joli lien programmé sous Géogébra¹ où sont proposées les différentes activités de cette annexe (attendre quelques instants que les scripts Géogébra soient actifs) :

<https://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9>

1. Merci à Christian Mercat pour ce travail!



(a) Au début du mouvement



(b) Sur l'ensemble du mouvement

FIGURE 6.1. La chute du wingsuit.

6.3. Équations de la paraboles

6.3.1. Équations paramétriques (ou horaires)

On se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, le point O correspondant à la position initiale du solide étudié (à $t = 0$).

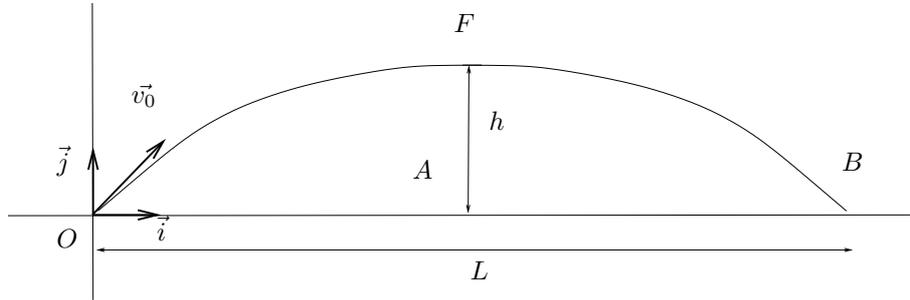


FIGURE 6.2. Les conventions adoptées.

On appelle g la constante de gravité, v_0 la norme de la vitesse initiale, qui fait un angle α avec le vecteur \vec{i} . Voir la figure 6.2.

On écrit la seconde loi de Newton au corps étudié (de masse m), qui n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{p} = m\vec{g}$. Notons \vec{a} l'accélération du centre de gravité du corps étudié. On a donc

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

ce qui implique

$$\vec{a} = \vec{g} \quad (6.1)$$

et donc en projetant en \vec{i} et sur \vec{j} , on obtient les équations (H.1a) page 90 et (H.1b) de l'annexe H.

$$a_x(t) = 0, \quad (6.2a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (6.2b)$$

où a_x et a_y désigne l'abscisse et l'ordonnée de l'accélération du centre de gravité du corps étudié. Ces équations ont déjà été vue dans le [Bas17, TD 3]! Le premier mouvement (en x) correspond à un mouvement à accélération nulle (voir équation (3.1) page 16 du corrigé de TD [Bas17]). Le second mouvement (en y) correspond à un mouvement à accélération constante (voir équation (3.4) page 17 du corrigé de TD [Bas17]), où $a = -g$. Il suffit donc de recopier ces équations en remplaçant a par $-g$ et v_0 respectivement par $v_{0,x}$ et $v_{0,y}$:

$$a_x(t) = 0,$$

$$a_y(t) = -g,$$

$$v_x(t) = v_{0,x},$$

$$v_y(t) = -gt + v_{0,y},$$

$$x(t) = v_{0,x}t + x_0,$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t + y_0.$$

Ici x_0 et y_0 correspondent aux conditions initiales. On remarque qu'à $t = 0$, x vaut x_0 et y vaut y_0 . On choisit le repère qui coïncide avec la position de la masse étudiée à $t = 0$ de sorte que $x_0 = y_0 = 0$.

Enfin, $v_{0,x}$ et $v_{0,y}$ sont les composantes en x et en y de la vitesse initiale, de norme v_0 et d'angle α avec l'horizontale. On obtient donc les équations (3.1) et (3.4) du corrigé de TD [Bas17] :

$$a_x(t) = 0, \quad (6.3a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (6.3b)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (6.3c)$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad (6.3d)$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (6.3e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (6.3f)$$

Les deux dernières équations sont dites paramétriques (ou dans notre cas particulier où le paramètre est le temps, on parle aussi d'équations horaires); elles fournissent x et y en fonction du paramètre t .

REMARQUE 6.1. On peut retrouver ces équations autrement en intégrant directement l'équation "vectorielle" (6.1) : l'intégration du vecteur \vec{a} fournit la vitesse \vec{v} et l'intégration du vecteur constant \vec{g} donne $\vec{g}t + \vec{v}_0$, où \vec{v}_0 est le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$:

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0. \quad (6.4)$$

Le vecteur vitesse \vec{v} se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

De même, le vecteur \vec{g} se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

À $t = 0$, les composantes de \vec{v}_0 sont $v_0 \cos \alpha$ et $v_0 \sin \alpha$ et donc

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

On obtient donc en projetant (6.4) sur \vec{i} et \vec{j} et en utilisant (6.5), (6.6) et (6.7),

$$v = v_0 \cos \alpha \text{ et } y = -gt + v_0 \sin \alpha$$

ce qui est exactement les équations (6.3c) et (6.3d). De même, en intégrant (6.4) et en écrivant que l'intégrale de \vec{v} est le vecteur déplacement \vec{OM} , qui se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{OM}_0,$$

ce qui fournit (6.3e) et (6.3f).

◇

REMARQUE 6.2. *Attention*, si

$$v_0 \cos \alpha = 0 \quad (6.8)$$

il faut faire un calcul un peu différent ! Deux sous-cas :

(1)

$$\cos \alpha = 0 \quad (6.9)$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \varepsilon \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (6.10)$$

où $\varepsilon = \pm 1$ est k est un entier. On a alors $\sin \alpha = \varepsilon$ et on obtient successivement :

$$a_x(t) = 0, \quad (6.11a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (6.11b)$$

$$v_x(t) = 0, \quad (6.11c)$$

$$v_y(t) = -gt + \varepsilon v_0, \quad (6.11d)$$

$$x(t) = 0, \quad (6.11e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \varepsilon v_0 t. \quad (6.11f)$$

Dans ce cas, la trajectoire est une droite!

(2) Si

$$v_0 = 0 \quad (6.12)$$

(α n'est pas défini dans ce cas), on obtient un résultat similaire :

$$a_x(t) = 0, \quad (6.13a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (6.13b)$$

$$v_x(t) = 0, \quad (6.13c)$$

$$v_y(t) = -gt, \quad (6.13d)$$

$$x(t) = 0, \quad (6.13e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (6.13f)$$

Dans ce cas, la trajectoire est une droite!

◇

REMARQUE 6.3. Il est important de noter que ces équations ne font pas intervenir la masse m de l'objet. C'est la simplification de la masse dans l'accélération et dans le poids qui permet cela. Cela n'était pas immédiat à comprendre par les physiciens.

La célèbre expérience de la chute des corps depuis la tour de Pise est bien connue (il est probable qu'en fait, Galilée n'a jamais fait cette expérience depuis la tour de Pise), son objectif consiste à mesurer le temps de chute de corps de différentes masses et de différentes natures. Galilée arriva à la conclusion (aujourd'hui classique), que ce temps de chute est le même pour tous les corps, quelque soient leur poids, leur taille et leur nature. En d'autres termes, la vitesse de chute libre est la même pour tous les corps. Cela allait clairement à l'encontre de l'intuition, et Galilée l'expliquait par un raisonnement simple par l'absurde : Supposons qu'un corps plus massif tombe plus vite qu'un corps léger, alors, si on attache à l'aide d'une ficelle une grosse pierre et une petite et qu'on les lâche, la grosse pierre devrait être ralentie dans son mouvement de chute par la petite qui *a priori* tombe moins vite. Donc l'ensemble {petite pierre+grosse pierre} tombe moins vite que la grosse pierre toute seule. Or, l'ensemble {petite pierre+grosse pierre} est plus lourd que la grosse pierre toute seule, et donc devrait en fait tomber plus vite, ce qui est en contradiction avec ce que l'on a dit plus haut. Cela est donc incohérent, et notre hypothèse de départ est fautive!

Pour en savoir plus sur Galilée, voir par exemple le lien suivant :

<http://www.aim.ufr-physique.univ-paris7.fr/CHARNOZ/homepage/GRAVITATION/grav4.html> dont les quelques lignes qui précèdent sont extraites.

Naturellement, ce calcul est fondé sur le fait que seul le poids intervient et donc que les frottements de l'air sont négligeables, ce qui devient totalement faux si on fait tomber ensemble une bille de plombs et une plume : les frottements agissant sur la plume sont très importants, et cette dernière arrive bien après la bille de plomb. Sauf ... si on fait le vide d'air et que l'on fait tomber ces deux objets dans une colonne en verre dont on a préalablement enlevé l'air en y faisant le vide.

◇

6.3.2. Équations cartésiennes

On cherche maintenant une équation cartésienne sous la forme $y = f(x)$: pour cela, on cherche à éliminer t au profit de $x(t)$ dans l'équation (6.3e). Deux cas se présentent

(1)

$$v_0 \cos \alpha \neq 0. \quad (6.14)$$

Dans ce cas, on peut exprimer t en fonction de $x(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (6.15)$$

On substitue cette valeur dans (6.3f) :

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

et donc, on retrouve l'équation (H.2) de l'annexe H.

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (6.16)$$

(2) Dans le cas où (6.8) a lieu, il faut réutiliser les formules (6.11) ou (6.13). Dans ces cas, la trajectoire est une droite qui ne peut se réduire à la forme (6.16) !

REMARQUE 6.4. Grâce à (6.3c) et (6.3d), calculons le carré de la norme de la vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\begin{aligned} v_x^2(t) + v_y^2(t) &= (v_0 \cos \alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin \alpha)^2, \\ &= v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha + g^2 t^2 - 2gtv_0 \sin \alpha, \\ &= v_0^2 - 2g \left(-\frac{1}{2}gt^2 + tv_0 \sin \alpha \right). \end{aligned}$$

On remplace la quantité $-\frac{1}{2}gt^2 + tv_0 \sin \alpha$ par $y(t)$ grâce à (6.3f) :

$$= v_0^2 - 2gy(t).$$

On a donc

$$\frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 2gy(t)),$$

soit encore

$$\frac{1}{2}mv^2(t) + mgy(t) = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Reprenons maintenant les théorèmes énergétiques du chapitre 7 .

- Le terme $\frac{1}{2}mv^2(t)$ correspond à l'énergie cinétique de translation de la masse m .
- Elle n'a pas d'énergie cinétique de rotation.
- Le terme $mgy(t)$ correspond à l'énergie potentielle de pesanteur.
- Enfin, à $t = 0$, $\frac{1}{2}mv_0^2$ correspond à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle est nulle.

Bref, on a montré que

$$E(t) = E(0).$$

Bref, l'énergie mécanique totale est constante ! Le système mécanique est donc mécaniquement isolé. Si l'on prend en compte les frottements de l'air, ce n'est plus vrai.

◇

6.4. Caractéristiques de la parabole

6.4.1. "Portée" L

Notons, comme sur la figure 6.2 page 41, L la distance horizontale parcourue, c'est-à-dire l'abscisse correspondant à y nul. On cherche donc $L = x$ la valeur correspondant à $y = 0$. D'après (6.16), on a donc :

$$\begin{aligned} 0 = y &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x, \\ &= x \left(-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ; on a donc deux solutions :

- soit $x = 0$, ce qui donne l'origine du mouvement, solution physiquement acceptable, mais ce n'est pas celle que l'on cherche !

- soit

$$-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x = -\tan \alpha &\iff \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x = \tan \alpha, \\ &\iff gx = 2 \tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha, \\ &\iff x = 2 \frac{\tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha v_0^2}{g}, \end{aligned}$$

et puisque $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$

$$\iff x = \frac{\sin(2\alpha)v_0^2}{g}$$

Bref, on retrouve l'équation (H.3) de l'annexe H : cette distance vaut L :

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (6.17)$$

REMARQUE 6.5. Si, en tirant au niveau du sol, avec une vitesse v_0 donnée et fixée, la plus grande portée possible correspond à L maximal, soit $\sin(2\alpha) = 1$, soit $2\alpha = \pi/2$ soit

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad (6.18)$$

angle bien connu des lanceurs d'objets ! Plus de détails dans la remarque I.3 page 168 de l'annexe I de [Bas18b].

6.4.2. "Hauteur" h

Au sommet de la parabole (à la "flèche"), la composante verticale de la vitesse est nulle ; avant, elle est positive, après, elle est négative. On a donc

$$v_y(t) = 0.$$

Déterminons donc le demi-temps de vol t (temps pour parcourir la partie de la parabole de 0 à F , la flèche) : d'après (6.3d), on a donc

$$0 = v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

et donc

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (6.19)$$

On remarque que l'on retrouve bien la valeur de t_2 donnée par (H.5). On réinjecte cette valeur dans (6.3f) et on trouve :

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right),$$

soit

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right), \end{aligned}$$

et donc

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (6.20)$$

On remarque que l'on retrouve bien la valeur de h donnée par (H.4).

REMARQUE 6.6. Une autre façon de procéder est d'admettre par symétrie que, l'ordonnée du sommet de la parabole correspondant à $x = L/2$, où L est donné par (6.17), que l'on réécrit :

$$\frac{L}{2} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}. \quad (6.21)$$

On réinjecte cette valeur dans (6.16) :

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \right)^2 + \tan \alpha \left(\frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \right).$$

On a donc successivement :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \frac{v_0^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}, \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned}$$

◇

REMARQUE 6.7. Une deuxième autre façon de procéder et d'utiliser l'équation cartésienne (6.16) et d'écrire qu'au sommet de la parabole, $y'(x) = 0$, ce qui donne

$$-\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0,$$

et donc

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g},$$

On retrouve donc bien la valeur donnée par (6.21) et le calcul se finit donc de la même façon que dans la remarque 6.6.

◇

REMARQUE 6.8.

Une troisième autre façon de déterminer la hauteur, plus rapidement, est d'utiliser la conservation de l'énergie, démontrée dans la remarque 6.4 page 44. On écrit que cette énergie est constante entre le début de la trajectoire et le sommet, ce qui donne :

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

soit encore

$$v^2 + 2gh = v_0^2,$$

On écrit $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ et on utilise (6.3c) : on a donc

$$v_0^2 \cos^2 \alpha + v_y^2 + 2gh = v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

soit encore

$$v_y^2 + 2gh = v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

Or, au sommet de la trajectoire, on a $v_y = 0$ et donc

$$2gh = v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

soit

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

et l'on retrouve bien la valeur de h donnée par (H.4).

◇

6.5. Exemple de mouvement de chute libre contraint

Voir section 6.5 p. 33 de [Bas18b]

6.6. Application et exemple

On pourra consulter deux problèmes donnés en examen :

- (1) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 1 du CCF2 (donné au printemps 2014) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaP14.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2corL2biomecaP14.pdf>
- (2) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 1 du CT (donné à l'automne 2014) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CTL2biomecaA14.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CTcorL2biomecaA14.pdf>

6.7. Parabole de sûreté

Voir [Bas18b, annexe I].

6.8. Application et exemple dans un cas où les frottements de l'air ne sont plus négligés

On pourra aussi consulter deux exercices donnés en examen, portant sur la chute des corps mais dans le cas beaucoup plus complexe où les frottements de l'air ne sont plus négligés². Dans ce cas, les connaissances de [Bas18b, chapitre "Introduction à la mécanique des fluides élémentaire"] sont nécessaires.

- (1) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 2 du CCF2 (donné à l'automne 2012) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaA12.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/corCCF2L2biomecaA12.pdf>
- (2) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 2 du CCF2 (donné au printemps 2011) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaP11web.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/corCCF2L2biomecaP11.pdf>

2. Ils sont même sauveteurs ici !

Systèmes linéaires et matrices

Ce chapitre est directement issu de [Bas22a, chapitre 7].

7.1. Rappels sur les systèmes linéaire d'ordre n

7.1.1. Cas $n = 1$

C'est le plus simple que vous connaissez ! On se donne deux réels a et b et on cherche $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$ax = b. \tag{7.1}$$

Vous savez que ce système admet une unique solution

$$x = b/a, \tag{7.2}$$

si et seulement si a est non nul. Sinon, on a soit aucune solution (si a est nul et b non nul) ou un ensemble infini de solutions qui est \mathbb{R} tout entier (quand a et b sont nuls).

La suite est une généralisation de cela avec notamment le distinguo entre le cas où la solution est unique et le cas où elle ne l'est pas (avec un ensemble de solutions vide ou infini). Les calculs sont plus complexes mais l'esprit est le même.

REMARQUE 7.1. Rappelons pourquoi la division par zéro est interdite. L'équation (7.2) est, par définition¹, équivalente à (7.1). Si $a \neq 0$, x est unique. Si ce calcul était valable pour $a = 0$, on aurait donc $0 = a \times x = b$. Si $b \neq 0$, cela est impossible. Si $b = 0$, tout réel x convient et $0/0$ n'est donc pas défini.

◇

7.1.2. Cas $n = 2$

On se donne $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ On cherche maintenant $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} ax + by = \lambda, \\ cx + dy = \mu. \end{cases} \tag{7.3}$$

Après calculs, que l'on fait par combinaison linéaire, on montre que si le déterminant du système, défini par

$$\Delta = ad - bc \tag{7.4}$$

est non nul, le système (7.3) admet un unique solution définie par

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\Delta} (d\lambda - b\mu), \\ y = \frac{1}{\Delta} (-c\lambda + a\mu). \end{cases} \tag{7.5}$$

1. C'est même ainsi que l'on définit le corps de fraction à partir des entiers relatifs a et b (voir [RDO93, section 3.4.2.]).

Au contraire, si Δ est nul, on a soit aucune solution, soit un ensemble infini de solutions, selon les valeurs du second membre.

EXEMPLE 7.2. On pourra montrer les formules (7.4) et (7.5) en exercice.

EXEMPLE 7.3. Résoudre

$$\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

On obtient

$$S = \{(1, 1)\}.$$

EXEMPLE 7.4. Résoudre

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 4. \end{cases}$$

On obtient

$$S = \emptyset,$$

puisque ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

EXEMPLE 7.5. Résoudre

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 2. \end{cases}$$

On obtient

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + 2y = 1\},$$

puisque ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

soit encore à

$$x + 2y = 1.$$

EXEMPLE 7.6. On étudie

$$\begin{cases} x + 2y = x', \\ 3x + 4y = y'. \end{cases} \quad (7.6)$$

On cherche à calculer x et y en fonction de x' et y' . Après calculs (par combinaisons linéaires de lignes), on constate que (7.6) est équivalent à

$$\begin{cases} x = -2x' + y', \\ y = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'. \end{cases} \quad (7.7)$$

7.1.3. Cas $n = 3$

On introduit la méthode du pivot de Gauss sur un exemple.

EXEMPLE 7.7. On étudie le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 19, \\ 5x - 2y + z = 4, \\ 3x + 4y + 2z = 17. \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss : on considère un pivot, ligne par ligne, élément non nul, et grâce à lui, on fait «disparaître» par combinaison de lignes, les coefficients qui sont «sous» lui. Il est préférable de noter, à chaque fois les opérations que l'on fait sur les lignes. Avec cette méthode, on a successivement (en notant en gras le pivot considéré) :

$$\begin{cases} \mathbf{1}x + 3y + 4z = 19 \\ 5x - 2y + z = 4 & (\mathbf{1}L_2 - 5L_1 \rightarrow L_2) \\ 3x + 4y + 2z = 17 & (\mathbf{1}L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 19 \\ 0 - 17y - 19z = -91 & (-L_2 \rightarrow L_2) \\ 0 - 5y - 10z = -40 & (-L_3/5 \rightarrow L_3) \end{cases}$$

puis, après simplification,

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 19 \\ 17y + 19z = 91 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 19 \\ \mathbf{17}y + 19z = 91 \\ y + 2z = 8 & (-L_2 + \mathbf{17}L_3 \rightarrow L_3) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 19 \\ 17y + 19z = 91 \\ 15z = 45 \end{cases}$$

Le système triangulaire obtenu se résout ensuite à l'envers. On a successivement

$$z = 3, \text{ puis } y = 2, \text{ puis } x = 1.$$

On peut vérifier *a posteriori* que ces trois valeurs vérifient bien le système initial.

PROPOSITION 7.8. *Lors de la méthode du pivot de Gauss, à chaque ligne éventuellement multipliée par un nombre non nul, on peut ajouter une autre ligne ce que l'on notera sous la forme*

$$L_i \leftarrow \alpha_i L_i + \beta_j L_j, \tag{7.8}$$

où α_i est non nul, j est différent de i et β_j est quelconque. On pourra aussi éventuellement intervertir deux lignes (à condition de permuter les éléments correspondants du second membre) ou deux colonnes (à condition de permuter les x_i correspondant).

On note aussi

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} \quad (7.14)$$

et

$$B = (b_j)_{1 \leq j \leq n} \quad (7.15)$$

Ici, on multiplie les deux matrices A et b selon une loi bien précise. Traditionnellement, i est appelé indice de ligne et j ceux de colonne.

Plutôt que de noter les opérations du pivot de Gauss comme dans l'exemple 7.7, on se contente de noter les différents systèmes linéaires obtenus par transformations successives par la suite des matrices A et B obtenues à chaque itération, en respectant les règles de la proposition 7.8 page 50. On peut même être plus synthétique et considérer une matrice \tilde{A} augmentée de la colonne du second membre.

EXEMPLE 7.11. Reprenons l'exemple 7.7 et les matrices A et B associées :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

La matrice \tilde{A} est égale à

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 19 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 17 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Réécrire les différentes étapes de l'exemple 7.7 en utilisant la matrice \tilde{A} .

7.2. Programmation informatique

On pourra consulter la fonction `resoud_system.m`, disponible sur le site habituel, qui permet de résoudre les systèmes linéaires en discriminant les cas où il y a une solution unique, ou aucune solution ou un ensemble infini de solution.

EXEMPLE 7.12. Si on reprend l'exemple 7.7, on obtient l'unique solution

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= 2, \\ z &= 3. \end{aligned}$$

EXEMPLE 7.13. Si on reprend l'exemple 7.9, on obtient un ensemble infini de solution.

EXEMPLE 7.14. Si on reprend l'exemple 7.10, on obtient aucune solution.

7.3. Un peu de théorie

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels (resp. complexes). Usuellement I , désigne la matrice identité de taille n . Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices rectangle à n lignes et p colonnes à coefficients réels.

DÉFINITION 7.15. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit le produit $C = AB$ comme matrice³ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad c_{ij} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}. \quad (7.18)$$

3. Penser à la relation de Chasles $(n, p) \times (p, q) = (n, q)$.

DÉFINITION 7.16. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est dite inversible s'il existe une matrice B telle que

$$\boxed{AB = BA = I.} \quad (7.19)$$

Dans ce cas, la matrice B est unique. On l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1} .

PROPOSITION 7.17. Une matrice A est inversible si et seulement si il existe B telle que

$$AB = I \text{ (ou } BA = I). \quad (7.20)$$

Une matrice non nulle n'est pas nécessairement inversible, comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 7.18. La matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

n'est pas inversible.

Formellement, il est équivalent de résoudre le système (7.11) et d'inverser la matrice A , puisque l'on a la propriété suivante :

PROPOSITION 7.19. Soit une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. La matrice A est inversible si et seulement si il existe une matrice B telle que, pour tout couple (X, Y) , le système $AX = Y$ est équivalent à $BY = X$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.

On peut donc retenir que, si A est inversible, pour tout couple (X, Y) ,

$$AX = B \iff X = A^{-1}B. \quad (7.21)$$

REMARQUE 7.20. De façon pratique, pour déterminer l'inverse de A (s'il existe), on pose $AX = Y$. Par résolution du système, on détermine X en fonction de Y sous la forme $Y = BX$. On a donc $A^{-1} = B$ d'après (7.21).

REMARQUE 7.21. La recherche directe de la matrice B vérifiant $AB = I$ (comme dans l'exemple 7.18) est beaucoup plus lourde (elle fait intervenir n^2 équations au lieu de n équation, en utilisant la proposition 7.19) et ne s'utilise jamais.

EXEMPLE 7.22. Si on reprend l'exemple 7.6, avec étudie la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Notons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

On obtient (7.7). Ainsi, pour tout X et Y , (7.6) est équivalent à (7.7). D'après la proposition 7.19, A est inversible et (7.7) nous fournit l'expression de A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier *a posteriori* aussi que AA^{-1} est bien égal à I .

EXEMPLE 7.23. On étudie la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de l'exemple 7.6, on constate que $AX = Y$ est équivalent à

$$\begin{cases} x + y = x', \\ x + y = y'. \end{cases} \quad (7.22)$$

Ainsi, on ne peut exprimer x et y en fonction de x' et y' , pour tout (x, y, x', y') : en effet si on choisit $x' \neq y'$, on aurait $x + y \neq x + y$ ce qui est absurde. Ainsi, A n'est pas inversible.

De façon pratique, si on veut résoudre un système $AX = B$, il est équivalent d'inverser la matrice et de résoudre le système (7.9) dans le cas où B est un vecteur «symbolique». Si B est un vecteur «numérique», il est plus rapide de résoudre le système (7.9) plutôt que de calculer A^{-1} puis d'en déduire $B = A^{-1}X$.

Donnons aussi une propriété théorique :

PROPOSITION 7.24. *Soit une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. La matrice A est inversible si et seulement si,*

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad (AX = 0 \implies X = 0).} \quad (7.23)$$

Il existe d'autres moyens d'inverser des matrices (ou, ce qui est théoriquement équivalent, de résoudre des systèmes) ; citons, entre autres :

- l'expression théorique, fondée sur le déterminant ;
- la transformation simultanée de deux matrices ;
- la décomposition LU .
- l'utilisation de logiciel matriciel, type matlab (qui les inverse numériquement ou formellement).

«À la main», le moyen le plus simple⁴ est de résoudre le système, en faisant des combinaisons de lignes et de colonnes afin de se ramener à un système triangulaire, plus simple à résoudre. On utilisera alors la proposition suivante qui permet de faire le lien entre l'inversibilité d'une matrice et la structure des solutions du système :

THÉORÈME 7.25. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système linéaire :*

$$AX = Y. \quad (7.24)$$

On a l'une des deux possibilités suivantes :

- (1) ou bien A est inversible et (7.24) admet une unique solution égale à $A^{-1}Y$.
- (2) ou bien A n'est pas inversible ; dans ce cas, on a de nouveau deux possibilités :
 - (a) soit le système (7.24) admet aucune solution ;
 - (b) soit le système (7.24) admet une infinité de solutions.

De plus, si on cherche à calculer X en fonction de Y en résolvant le système :

- dans le cas 1, on n'aura qu'une seule solution ;
- dans le cas 2a, on aboutira à au moins un couple de deux équations contradictoires ou une équation impossible ;
- dans le cas 2b, on aboutira au moins à une équation redondante (et aucun couple d'équations contradictoires et aucune équation impossible).

Notons aussi le résultat suivant :

PROPOSITION 7.26. *Si une matrice possède une ligne (ou une colonne) nulle ou une ligne (resp. une colonne) qui soit combinaison linéaires des autres lignes (resp. de colonnes), alors elle n'est pas inversible.*

Nous verrons quelques exemples et applications en TD.

Dans le cas $n = 2$, l'expression de l'inverse d'une matrice est très simple (on laisse au lecteur le soin de vérifier cette proposition) :

4. dans le cas général ; parfois, il faut considérer les structures particulières des systèmes étudiés.

PROPOSITION 7.27. Une matrice carrée d'ordre deux

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

est inversible si et seulement si son déterminant, donné par

$$\det(A) = ad - bc, \tag{7.25}$$

est non nul. Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

Parfois, on modifiera le système de façon à profiter de la présence de zéro comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 7.28. On met le système suivant

$$\begin{cases} y + z = 2, \\ x + y + 4z = 6, \\ 3x - y + z = 3, \end{cases}$$

sous la forme

$$\begin{cases} x + y + 4z = 6, \\ y + z = 2, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$$

On laisse au lecteur le soin de finir le calcul.

EXEMPLE 7.29. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 3y + 3z = 11, \\ -x + y + z = 2. \end{cases}$$

Après calculs, on le met sous la forme

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ y + z = 3, \\ 2y + 2z = 6. \end{cases}$$

Puisque les deux dernières lignes sont proportionnelles, le système admet une infinité de solutions. Ainsi, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, ce qu'on aurait pu prévoir immédiatement, puisqu'elle possède deux colonnes identiques (d'après la proposition 7.26).

On se trouve dans le cas 2b du théorème 7.25.

EXEMPLE 7.30. En utilisant la proposition 7.26, on peut constater sans calculs que les matrices suivantes ne sont pas inversibles :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 7.31. Reprenons l'exemple 7.29 où le membre de droite est modifié. On sait déjà que la matrice n'est pas inversible et le système admet soit une infinité de solution soit aucune solution. Le système

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 3y + 3z = 11, \\ -x + y + z = 3. \end{cases}$$

se met sous la forme

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ y + z = 3, \\ y + z = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Il n'admet donc aucune solution.

On se trouve dans le cas 2a du théorème 7.25.

7.4. D'autres méthodes de résolutions de systèmes linéaires

Voir par exemple [DB21, chapitre "Systèmes d'équations linéaires"].

Mise en situation A (Rappel de mécanique des fluides, Poussée d'Archimède)

Cette section est directement issue de [Bas18b, chapitre 9], disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/coursL2biomeca.pdf>

8.1. Définition des fluides

D'après [GS85, pages 3 et 4], on a :

DÉFINITION 8.1. « De façon élémentaire, un liquide a un volume propre mais pas de forme propre, un gaz n'a pas de volume propre et tend à occuper tout l'espace qui lui est offert ».

Remarquons que, contrairement aux liquides et aux gaz, le solide a un volume et une forme propre (mais cette forme peut varier pour des solides déformables).

Liquide et gaz se distinguent considérablement par leur compressibilité ; très faible, voire considérée comme nulle, pour les liquides, elle est plus importante pour les gaz. Dans certains cas, on pourra aussi considérer les gaz légitimement incompressibles.

Gaz et liquide se comportent tous les deux comme un fluide.

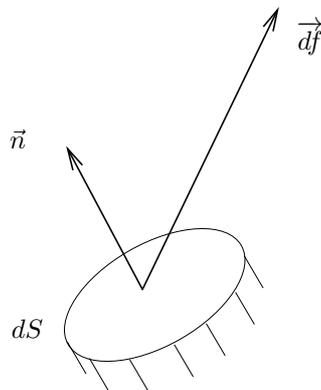


FIGURE 8.1. La facette dS

Dans un milieu continu général (solide ou fluide), on considère une « facette » de taille infinitésimale dS . Cette facette est dirigée par une normale \vec{n} , par définition perpendiculaire à la facette (voir figure 8.1). L'action exercé par le solide, du côté de n , sur la facette est égale à la force élémentaire (ou infinitésimale) \vec{df} donnée par

$$\vec{df} = \vec{\tau}dS. \quad (8.1)$$

Cette force n'est pas nécessairement perpendiculaire à la facette : composante normale (sur \vec{n}) et tangentielle. Dans un solide par exemple, il peut exister des contraintes de cisaillement.

DÉFINITION 8.2. Un fluide est un milieu continu qui se déforme aussi longtemps que lui sont appliquées des contraintes tangentielles.

DÉFINITION 8.3. On appelle fluide non visqueux ou parfait, un modèle de fluide dans lequel les contraintes sont toujours normales.

Pour plus de détails, on se reportera à [GS85, p. 2 à 6].

EXEMPLE 8.4. Quand la durée de temps est très brève, l'eau peut se comporter comme un solide! En effet, si on ne laisse pas le temps à la particule d'eau de se mouvoir, le liquide reste très peu déformable. Voir les ricochets, le ski nautique, les plats ...

Voir aussi la fausse course sur l'eau suivante :

<http://www.youtube.com/watch?v=0e3St1GgoHQ>

démentie de façon scientifique par l'émission suivante

http://www.dailymotion.com/video/xvnj6f_em01-peut-on-marcher-sur-l-eau_tv

ou sur d'autres planètes :

http://www.lemonde.fr/sciences/article/2013/09/23/sur-la-lune-on-peut-marcher-sur-l-eau_3483077_1650684.html

EXEMPLE 8.5. De même pour des durées de temps brèves, le verre se comporte comme un solide, mais quand la durée est beaucoup plus importante, il pourrait se comporter de façon analogue à fluide!.

<http://www.linternaute.com/science/magazine/vrai-faux/verre/verre.shtml>

On pourra aussi consulter

https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9canique_des_fluides

Commençons maintenant par le cas le plus simple, celui des fluides au repos.

8.2. Fluides au repos

On pourra consulter, pour plus de détails [BMW11, fiches 1 à 4 et 7], [GS85, chapitres 1, 4 et 5] et [Cau08, chapitre A].

Par définition, dans un fluide au repos, toutes les vitesses sont nulles.

En fait, dans les gaz, les particules sont en agitation constante. C'est leur vitesse moyenne qui est nulle. Voir <http://fr.wikipedia.org/wiki/Température> et l'animation http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6d/Translational_motion.gif. ◇

DÉFINITION 8.6. Si on considère un élément de surface infiniment petit dS , l'absence de contraintes tangentielle au repos nous permet d'écrire que cet élément de surface est soumis, de la part du milieu environnant du côté de \vec{n} , à la force infinitésimale

$$\vec{df} = -P\vec{dS} = -PdS\vec{n}. \quad (8.2)$$

Le nombre P est appelé pression. Elle dépend de l'endroit où l'on est, mais aussi, *a priori* de l'orientation de la facette, donnée par \vec{n} . On peut montrer (voir [GS85, exercice p. 53]) que P est indépendant de \vec{n} .

Il suffit en effet d'écrire que le vecteur \vec{df} de (8.1) est colinéaire à \vec{n} et donc

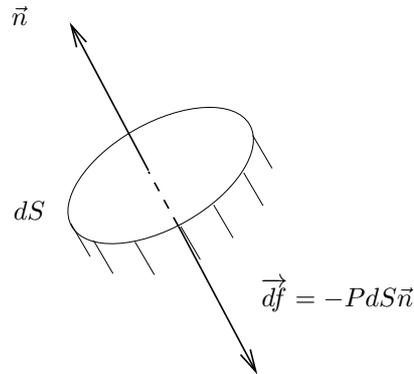
$$\vec{df} = \vec{\tau}dS = -P\vec{n}dS = -P\vec{dS}.$$

Dans la plupart des cas, P est positif.

Voir figure 8.2.

Il existe des liquide à pression négative! Voir [GS85, p. 56]. ◇

REMARQUE 8.7. il faut bien comprendre que c'est l'action du fluide, du côté de \vec{n} qui exerce la force $-PdS\vec{n}$ sur la facette. L'action du fluide de l'autre de côté de \vec{n} exerce la force opposée $PdS\vec{n}$ sur la facette qui est bien en équilibre. Pour visualiser cela, on peut imaginer un manomètre de plongée, qui peut être considéré

FIGURE 8.2. la facette dS dans un fluide au repos

comme une petite surface, soumise d'un coté à la pression de l'eau environnante et de l'autre à une pression moindre, connue. C'est la mesure de la différence de pression qui permet la détermination de la pression de l'eau.

REMARQUE 8.8. Si la pression est constante sur une surface S , on a

$$\vec{F} = -PS\vec{n}, \quad (8.3)$$

et on peut définir aussi la pression moyenne F/S , comme par exemple dans le cas d'un sujet debout sur une plate forme de force.

8.2.1. Équation fondamentale de l'équilibre dans un fluide au repos et distribution des pressions

PROPOSITION 8.9. *Au sein d'un fluide au repos de masse volumique μ , qui n'est soumis qu'au seules forces de pesanteur, la pression P ne dépend que de l'altitude z et on a*

$$P'(z) = -\mu g. \quad (8.4)$$

DÉMONSTRATION. On considère un « parallélépipède élémentaire » de fluide de cotés égaux respectivement à dx , dy et dz , qui sont des quantités infinitésimales, de telles sorte que la pression est constante sur chaque face et la densité volumique constante à l'intérieur.

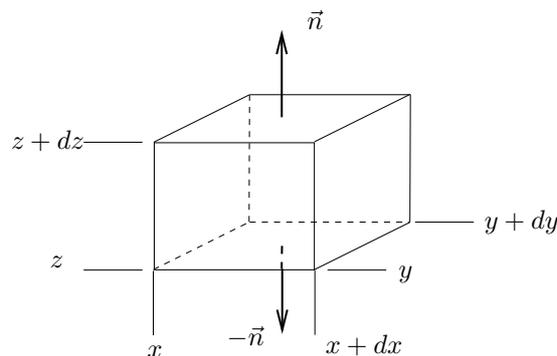


FIGURE 8.3. L'équilibre du « parallélépipède élémentaire »

On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère orthonormé. On écrit que ce fluide est équilibre (voir figure 8.3). Les forces de pressions exercées par le reste du fluide sur ce cube sont égales respectivement à

- $-P(x, y, z + dz)dxdy\vec{n} = -P(x, y, z + dz)dxdy\vec{k}$ pour la face supérieure ;
- $P(x, y, z)dxdy\vec{n} = P(x, y, z)dxdy\vec{k}$ pour la face inférieure ;
- $P(x, y, z)dydz\vec{i}$ pour la face gauche ;
- $-P(x + dx, y, z)dydz\vec{i}$ pour la face droite ;
- $P(x, y, z)dxdz\vec{j}$ pour la face avant ;
- $-P(x, y + dy, z)dxdz\vec{j}$ pour la face arrière ;

De plus, le cube a un poids égal à $dM\vec{g} = dV\mu\vec{g} = dxdydz\mu\vec{g} = -dxdydz\mu g\vec{k}$. La somme de ces forces est nulle et on a donc

$$\begin{aligned} & (-P(x, y, z + dz)dxdy + P(x, y, z)dxdy - dxdydz\mu g)\vec{k} + (P(x, y, z)dydz - P(x + dx, y, z))\vec{i} \\ & \quad + (P(x, y, z)dxdz - P(x, y + dy, z)dxdz)\vec{j} = \vec{0}. \end{aligned}$$

On écrit la nullité de l'abscisse, de l'ordonnée et de la cote de ce vecteur et on obtient successivement en divisant par $dxdydz$:

$$\frac{P(x, y, z + dz) - P(x, y, z)}{dz} = -\mu g,$$

en divisant par $dydz$

$$P(x, y, z) = P(x + dx, y, z),$$

en divisant par $dxdz$

$$P(x, y, z) = P(x, y + dy, z).$$

Des deux dernières équations, on déduit que P ne dépend que de z . On écrit ensuite

$$P(x, y, z + dz) = P(z + dz) \approx P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz = P(z) + P'(z) dz$$

ce qui donne, grâce à la première équation

$$P'(z) = -\mu g.$$

□

AUTRE DÉMONSTRATION. On peut raisonner comme [GS85, p. 51-52] et montrer que l'on a

$$\nabla P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \mu \vec{g}. \quad (8.5)$$

ce qui est équivalent à (8.4). □

◇

On a alors deux applications de ce résultat :

8.2.1.1. *Distribution des pressions dans un liquide incompressible au repos.*

PROPOSITION 8.10. *Dans le cas d'un fluide incompressible et de température constante (et donc de masse volumique μ constante) qui n'est soumis qu'aux force de pesanteur, la pression ne dépend que l'altitude et, entre deux points d'altitude respectives z et z_0 , on a*

$$P(z) - P(z_0) = -\mu g(z - z_0). \quad (8.6)$$

DÉMONSTRATION. On intègre l'équation (8.4). Puisque μ est contant, on a donc

$$P(z) = -\mu g z + K,$$

où K est une constante. Par différence, on en déduit (8.6) □

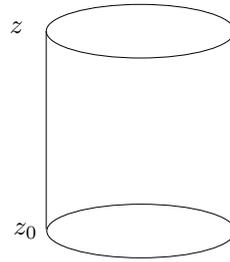


FIGURE 8.4. L'équilibre du « cylindre de fluide »

AUTRE DÉMONSTRATION.

On considère un « cylindre de fluide », vertical, compris entre les deux cotes z et z_0 avec $z \geq z_0$, comme indiqué sur la figure 8.4. On admet que la pression ne dépend que de z . Les pressions sur les côtés ont une composante verticale nulle. De plus, ce cylindre est soumis aux forces verticales de composantes respectives $-P(z)S$ et $P(z_0)S$. L'équilibre de ce cylindre donne donc

$$0 = -P(z)S + P(z_0)S - Mg = -P(z)S + P(z_0)S - \mu Vg = -P(z)S + P(z_0)S - \mu S(z - z_0)g,$$

où S est la surface de cercle de base du cylindre. On en déduit donc (8.6), après division par S . \square

EXEMPLE 8.11. Naturellement, cela est vrai pour l'eau. Si on note P_0 la pression du gaz environnant (l'atmosphère) à la surface libre du liquide, on a alors, à la profondeur $h \geq 0$,

$$P(h) = P_0 + \mu gh. \quad (8.7)$$

EXEMPLE 8.12. Pour la pression atmosphérique dans des conditions normales (à 0°), on a, selon [GS85, p. 62]

$$P_0 = 101324,9 \text{ Pa}, \quad (8.8a)$$

soit encore en utilisant l'unité atm, non légale mais usitée

$$P_0 = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}, \quad (8.8b)$$

on a

$$P_0 = 1 \text{ atm} \approx 1 \text{ bar} \approx 10^5 \text{ Pa}. \quad (8.8c)$$

La masse volumique de l'eau¹

$$\mu_0 = 1000 \text{ kgm}^{-3} = 1 \text{ kg l}^{-1}. \quad (8.9)$$

On a donc

$$P(h) = 1000 \times 10h + P_0 = 10^4 h + 10^5. \quad (8.10)$$

Si on exprime toutes les pressions en bar et h en mètres, on a donc

$$P(h) = 0,1h + 1 \quad (8.11)$$

On retrouve donc la règle usuelle des plongeurs : *égale à 1 bar à la surface, la pression augmente de 1 bar tous les 10 mètres.*

1. Attention, celle de l'eau de mer salée est un peu plus importante.

8.2.1.2. *Poussée d'Archimède.* On pourra consulter [GS85, p. 71,72] et https://fr.wikipedia.org/wiki/Pouss%C3%A9e_d'Archim%C3%A8de

PROPOSITION 8.13. *Tout corps immergé² dans un fluide³ quelconque reçoit de la part de ce fluide une force verticale égale (en vecteur) à l'opposé du poids du fluide déplacé.*

DÉMONSTRATION. Supposons que ce corps est délimité par une surface S . Le corps est soumis à son poids \vec{P} , à d'autres éventuelles forces et aux forces de pression dues au fluide, notée \vec{P}' , cette dernière ne dépendant que de la surface S . Remplaçons ce corps, par le même fluide que celui dans lequel il est immergé, qui devient alors à l'équilibre. Ce fluide est lui aussi délimité par une surface S et est soumis à son poids \vec{P}' et aux mêmes forces de pression \vec{P} , qui s'équilibre et on a donc bien

$$\vec{P} = -\vec{P}',$$

qui est le poids du fluide déplacé. □

EXEMPLE 8.14 (Flottabilité d'un objet immergé dans un liquide).

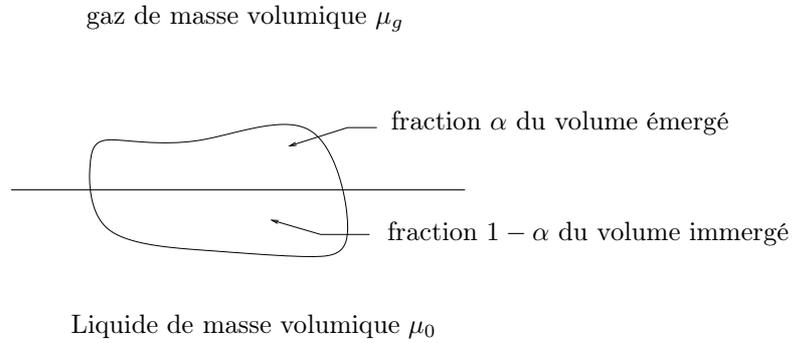


FIGURE 8.5. L'équilibre de l'objet

Soit un objet de volume V et de masse volumique (pas nécessairement homogène) μ (voir figure 8.5). Il est immergé dans un liquide de masse volumique μ_0 , non nécessairement homogène. Ce liquide est surmonté d'un gaz de masse volumique μ_g , non nécessairement homogène.

Soit $\alpha \in [0, 1]$, la fraction du volume du solide qui est au dessus de la surface du liquide. La fraction du volume du solide en dessous de la surface du liquide est donc $1 - \alpha$. L'équilibre des forces donne donc, en notant $M = \mu V$, la masse de l'objet,

$$Mg - (1 - \alpha)\mu_0 Vg - \alpha\mu_g Vg = 0, \quad (8.12)$$

ce qui donne

$$\mu - (1 - \alpha)\mu_0 - \alpha\mu_g = 0,$$

et donc

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 - \mu_g}. \quad (8.13)$$

On peut vérifier que l'hypothèse $\mu_g < \mu \leq \mu_0$ entraîne que α est compris entre 0 et 1. Si on suppose μ_g négligeable devant μ_0 , ce qui est usuellement le cas, on a

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0},$$

et donc

$$\alpha = 1 - \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (8.14)$$

2. non nécessairement à l'équilibre; néanmoins, le fluide environnant doit être à l'équilibre ou proche de l'équilibre.
3. qui peut être un liquide, un gaz, de deux liquides non miscibles, d'un gaz surmonté d'une atmosphère gazeuse.

Puisque $\alpha \in [0, 1]$, on a donc nécessairement

$$\mu \leq \mu_0, \quad (8.15)$$

ce qui permet au corps de flotter.

Dans l'approximation usuelle, on a $\mu_0 = 1$; Par exemple, pour le bois de hêtre, on a $\mu = 0.8$ kg/l, ce qui donne $\alpha = 0.2$; pour un iceberg, on a $\mu = 0.895$ kg/l, ce qui donne $\alpha = 0.105$, soit 89.5 % de la partie de l'iceberg immergée.

Le cas limite $\mu \rightarrow 0$ correspond à $\alpha \rightarrow 1$ et le cas limite $\mu \rightarrow \mu_0$ correspond à $\alpha \rightarrow 0$: le solide est entièrement immergé.

REMARQUE 8.15. Si on néglige μ_0 devant μ_g , l'équation (8.12) donne aussi $\mu Vg - (1 - \alpha)\mu_0 Vg$, soit

$$\mu Vg - (1 - \alpha)\mu_0 Vg = 0, \quad (8.16)$$

et donc

$$(1 - \alpha) = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Si $\mu = \mu_0$, on a donc $1 - \alpha = 1$ soit $\alpha = 0$. Ainsi, si le solide a la même masse volumique que le liquide aucune partie n'émerge, ce qui semble assez naturel. Ce qui l'est moins, c'est que cela explique aussi le fait contre-intuitif suivant : si un verre d'eau contient un glaçon qui flotte et que celui-ci fond, le niveau d'eau dans le verre restera identique ! Cela peut s'expliquer de la façon qualitative suivante : l'équation (8.16) traduit le principe d'Archimède : le poids du volume d'eau déplacé par le glaçon est égal au poids du glaçon. Si le glaçon fond, il garde le même poids et déplace donc le même volume d'eau ! Autrement dit la fonte des parties de banquises qui flottent dans l'eau (comme au pôle Nord) ne fera pas monter le niveau d'eau de la mer, contrairement à ce qui se passe pour la fonte des glaciers et de la calotte glaciaire du pôle Sud, qui ne flottent pas mais repose sur la terre ferme et dont la fonte fait monter le niveau de la mer.

Bien entendu, tout cela est valable parce que $\mu \leq \mu_0$, ce qui traduit que l'eau s'expand quand elle gèle, seul liquide à vérifier cette propriété ! Si l'eau se contractait en fondant, les glaçons et les banquises couleraient et ... feraient augmenter le niveau de la mer en fondant !

De plus, ce calcul suppose que l'eau de la banquise possède la même salinité que celle de la mer, dont elle provient en partie. Il est noter qu'en fait, la partie superficielle de la banquise est constituée d'eau douce⁴ et donc que les masses volumiques de l'eau de fonte et l'océan sont légèrement différentes. Voir <http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/fonte-banquise-2005-10-06.xml> qui montrent qu'avec la différence de salinité de l'eau de la banquise et de celle de l'océan, on trouve une variation de hauteur de 4,4 mm, ce qui est vraiment négligeable et ce d'autant plus que cette valeur correspond au cas où la banquise supposée composée uniquement d'eau douce fondrait dans sa totalité.

EXEMPLE 8.16 (Archimède et la couronne d'or).

On équilibre une balance avec la couronne d'un côté et de l'or pur de l'autre, dont les masses sont égales. Ensuite, on immerge complètement les objets pesés (pour s'affranchir de l'influence des plateaux de la balance, on peut s'assurer que ceux-ci sont bien strictement identiques, ou, mieux, les supprimer en les remplaçant par un fil fin et de densité proche de celle de l'eau). Si la couronne n'est pas en or pur, elle est de volume un peu plus grand, donc elle produit une force d'Archimède vers le haut un peu plus importante que la même masse d'or pur et l'équilibre initial de la balance est rompu. La différence de poids est faible ; elle correspond au poids de 5 cm³ d'eau, soit 5 g. Il faut donc une balance capable de détecter une telle variation, ce qui est difficile, mais pas irréaliste.

Cela est extrait de https://fr.wikipedia.org/wiki/Pouss%C3%A9e_d'Archim%C3%A8de sur laquelle d'autres détails sont disponibles. On pourra aussi consulter <http://villemin.gerard.free.fr/aScience/Physique/EurekaCo.htm#principe>

4. Les eskimos, qui se servent de cette glace pour boire ou fabriquer des igloos, le savent bien.

REMARQUE 8.17. Dans l'expérience de l'exemple 8.16, il est possible de rétablir l'équilibre de la balance dans l'eau, ce qui permet de déterminer la masse de métal impur de la couronne. Comment peut-on procéder? Voir exercice de TD 8.2.

EXEMPLE 8.18 (masse volumique ou masse apparente d'un objet totalement immergé dans un liquide). Soit un corps constitué d'un ensemble de p corps, chacun d'entre eux étant de masse m_i , de volume V_i et de masse volumique μ_i , non nécessairement homogène.

On le suppose en équilibre et totalement immergé dans un liquide de masse volumique μ_0 . On a donc

$$0 = \sum_i M_i - M_{\text{liquide déplacé}} = \sum_i \mu_i V_i - V \mu_0 = \sum_i \mu_i V_i - \sum_i \mu_0 V_i$$

et donc

$$\sum_i (\mu_i - \mu_0) V_i = 0. \quad (8.17)$$

Chaque constituant a donc une masse volumique apparente $\mu_i - \mu_0$ ou une masse apparente $M_i - \mu_0 V_i$

Si on ne prend qu'un seul constituant de masse M et de volume V , on a

$$0 = M - V \mu_0,$$

si la masse est exprimée en kilogramme, si le volume est exprimé en litre, et si l'objet baigne dans l'eau de masse volumique μ_0 donnée par (8.9), on retrouve la règle des plongeurs,

$$M - V = 0. \quad (8.18)$$

Si l'on a plusieurs corps, on a alors

$$\sum_i M_i - V_i = 0 \quad (8.19)$$

EXEMPLE 8.19 (Flottabilité d'un objet immergé dans un liquide). On parle aussi de masse volumique apparente ou de masse apparente, pour la notion de flottabilité d'un corps immergé dans l'eau, non nécessairement au repos; La masse volumique apparente d'un objet de masse M , de volume V et de masse volumique μ est donc donnée par

$$\mu_a = \mu - \mu_0, \quad (8.20)$$

qui peut être positive ou négative. Sa masse apparente est

$$\mathcal{M} = (\mu - \mu_0)V = M - \mu_0 V, \quad (8.21)$$

qui peut être positive ou négative. Si le volume est exprimé en litre, et si l'objet baigne dans l'eau de masse volumique μ_0 donnée par (8.9), on retrouve la règle des plongeurs,

$$\mathcal{M} = M - V. \quad (8.22)$$

Dans le cas de plusieurs objet, on écrit (8.22) sous la forme

$$\mathcal{M} = \sum_i M_i - V_i. \quad (8.23)$$

EXEMPLE 8.20 (Étude d'un ballon sonde ou d'un aérostat).

Non rédigé

Voir [GS85, exercice résolu E p. 72 et 73].

Voir aussi

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Aérostat>

Chapitre 9

Mise en situation B (équation des ondes)

Voir exercices de TD 9.1 et 9.2.

Quelques développements limités usuels

n est un entier naturel et tous ces développements limités sont en zéro.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n)}x^n + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Il est important de savoir retrouver ces formules !

Annexe B

Quelques dérivées usuelles

fonction	dérivée
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln x$	$1/x$
$\ln u $	u'/u
e^x	e^x
a^x	$\ln a a^x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x = 1 - \tanh^2 x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$

Il est important de savoir retrouver ces formules !

Annexe C

Quelques primitives usuelles

fonction	primitive	valable sur
x^α ($\alpha \neq -1$)	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	\mathbb{R} si α entier, sur \mathbb{R}_+ sinon
$1/x$	$\ln x $	\mathbb{R}_+^*
$1/(x-a)$	$\ln x-a $	un intervalle ne contenant pas a
$1/(bx-c)$	$\ln bx-c /b$	un intervalle ne contenant pas c/b
u'/u	$\ln u $	un intervalle où u ne s'annule pas
$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}/\alpha$	\mathbb{R}
a^x	$a^x/\ln a$	\mathbb{R}
$\cos(\alpha x)$	$(\sin(\alpha x))/\alpha$	\mathbb{R}
$\sin(\alpha x)$	$-(\cos(\alpha x))/\alpha$	\mathbb{R}
$\cosh(\alpha x)$	$(\sinh(\alpha x))/\alpha$	\mathbb{R}
$\sinh(\alpha x)$	$(\cosh(\alpha x))/\alpha$	\mathbb{R}
$\tan(\alpha x)$	$-\ln \cos(\alpha x) /\alpha$	\mathbb{R}
$1/(x^2+a^2)$	$(1/a)\arctan(x/a)$	\mathbb{R}
$1/(x^2-a^2)$	$(1/2a)\ln(x-a / x+a)$	$(a > 0)$ un intervalle ne contenant ni a ni $-a$
$1/(\sqrt{a^2-x^2})$	$\arcsin(x/a)$	$(a > 0)$ $[-a, a]$
$1/(\sqrt{x^2+a^2})$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$(a > 0)$ \mathbb{R}
$1/(\sqrt{x^2-a^2})$	$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$	$(a > 0)$ $[a, +\infty[$

Il est important de savoir retrouver ces formules! Une partie de ce tableau n'est autre que le tableau de l'annexe B, écrit à l'envers!

Rappels sur les racines d'un polynôme de degré 2

Soient trois réels a , b et c , a étant non nuls. On s'intéresse au polynôme du second degré :

$$P(x) = ax^2 + bx + c. \quad (\text{D.1})$$

Le discriminant Δ est donné par

$$\Delta = b^2 - 4ac. \quad (\text{D.2})$$

— Si $\Delta > 0$, le polynôme P a deux racines réelles distinctes définies par

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (\text{D.3})$$

— Si $\Delta = 0$, le polynôme P n'a qu'une seule racine réelle définie par

$$x = -\frac{b}{2a}. \quad (\text{D.4})$$

— Si $\Delta < 0$, le polynôme P a deux racines complexes conjuguées distinctes définies par

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}. \quad (\text{D.5})$$

Si le polynôme est à coefficients complexes, la formule (D.3) est valable dans tous les cas, à condition de considérer δ une "racine" de Δ , toujours donnée par (D.2), c'est-à-dire un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. Dans ce cas, les deux racines, réelles ou complexes, de P (qui sont confondues si $\Delta = 0$) sont données par

$$x = \frac{-b \pm \delta}{2a}. \quad (\text{D.6})$$

Voir par exemple [Bas22d, Annexe "Nombres Complexes", notamment la section "A.1.2. Résolution d'équation du second degré"].

Dans tous les cas, on a :

$$\text{le produit des deux racines de } P \text{ vaut } c/a; \quad (\text{D.7a})$$

$$\text{la somme des deux racines de } P \text{ vaut } -b/a. \quad (\text{D.7b})$$

Enfin, si le nombre b vaut

$$b' = 2b, \quad (\text{D.8})$$

où b est un nombre quelconque, on a les formules réduites : l'équation (D.2) est remplacée par

$$\Delta' = b'^2 - ac, \quad (\text{D.9})$$

Δ' est appelé le discriminant réduit et on a

— Si $\Delta' > 0$, l'équation (D.3) est remplacée par

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}. \quad (\text{D.10})$$

— Si $\Delta' = 0$, l'équation (D.4) est remplacée par

$$x = -\frac{b'}{a}. \quad (\text{D.11})$$

— Si $\Delta' < 0$, l'équation (D.5) est remplacée par

$$x = \frac{-b' \pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}. \quad (\text{D.12})$$

Si δ est un nombre tel que $\delta'^2 = \Delta$, la formule (D.6) est remplacée par

$$x = \frac{-b' \pm \delta'}{a}. \quad (\text{D.13})$$

Intégration (théorie)

Cette annexe est directement issue de [Bas22a, Chapitre 3].

E.1. Références

- (1) On pourra consulter par exemple le site de Frédéric Holweck relatif à l'UV MT12 de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM) :
<http://utbmfh.pagesperso-orange.fr/MT12.html>
- (2) On pourra aussi consulter par exemple le site d'Arthur Lannuzel relatif à l'UV MT11 de l'UTBM :
<http://mathutbm.free.fr/MT11.html>
 On pourra consulter notamment les liens suivants :
 - Intégrale de Riemann : <http://mathutbm.free.fr/MT12/cours/IntegraledeRiemann.pdf>
 - Primitives classiques : <http://mathutbm.free.fr/MT12/cours/primitivesclassiques.pdf>
 - Méthodes classiques d'intégration : http://mathutbm.free.fr/MT12/cours/Methodes_classiques_dintegration.pdf
- (3) Pour une définition plus théorique (qui présente en même temps les intégrales multiples), on pourra aussi consulter [Bas11a, chapitres 5 et 6].
- (4) On pourra aussi consulter l'URL de wikipédia suivante :
[http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégration_\(mathématiques\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Intégration_(mathématiques))

E.2. Introduction informelle sur un exemple

Traisons plusieurs exemples issus de [Bas18a, chapitre 4].

Si on considère un solide évoluant sur un axe rectiligne, dont l'abscisse est notée $x(t)$, nous passons du déplacement à la vitesse et de la vitesse à l'accélération par dérivation, ce qui graphiquement, correspond à prendre la tangente à la courbe.

Rappelons que si d est la distance parcourue, pendant un temps t , la vitesse moyenne est définie par

$$v = \frac{d}{t}. \quad (\text{E.1})$$

Cette formule définit aussi la vitesse instantanée à tout instant, si celle-ci est constante.

Si $x(t)$ est connue, la vitesse moyenne v sur l'intervalle de temps $[t, t + T]$, la vitesse moyenne sur cet intervalle de temps est définie par

$$v = \frac{x(t + T) - x(t)}{T}, \quad (\text{E.2})$$

parfois notée sous la forme

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (\text{E.3})$$

La vitesse instantanée à l'instant t est

$$v(t) = x'(t), \quad (\text{E.4})$$

noté aussi sous une forme analogue à (E.3)

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (\text{E.5})$$

et en confondant parfois abusivement Δx et dx , et Δt et dt , quand dt est « petit ».

On pourra consulter de nouveau [Bas18a, chapitre 4], mais aussi le cours de MNB où la notion de dérivation numérique sera abordée !

Nous allons maintenant faire l'opération inverse, passer de la vitesse au déplacement.

EXEMPLE E.1. On suppose la vitesse constante et connue, égale à $v_0 = 100$ km/h.

- (1) À partir de la vitesse, comment calculer le déplacement au cours du temps ?
- (2) Montrer que sur la courbe (temps,vitesse), cette quantité correspond à l'aire «sous la courbe» entre 0 et t .

EXEMPLE E.2. On suppose maintenant la vitesse connue et définie par la formule

$$v(t) = 200t.$$

- (1) Montrer que si le déplacement est donné par

$$x(t) = 100t^2. \quad (\text{E.6})$$

alors $x'(t) = v(t)$.

- (2) En utilisant la formule du déplacement donnée par (E.6), montrer sur la courbe (temps,vitesse), le déplacement cette quantité correspond à l'aire «sous la courbe» entre 0 et t .

EXEMPLE E.3. Supposons maintenant la courbe v connue et quelconque. On cherche à déterminer x .

Plus précisément, on se donne $a < b$; on se suppose connue $x(a)$, la fonction v sur l'intervalle $[a, b]$ et on cherche à calculer $x(b)$.

Pour cela, on se donne un entier N et on découpe l'intervalle $[a, b]$ en N intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ de la façon suivante : on pose

$$\begin{aligned} t_0 &= a, \\ h &= \frac{b-a}{N}, \\ \forall i \in \{0, \dots, N\}, \quad t_i &= hi + a. \end{aligned}$$

On a donc $t_N = b$.

Voir figure E.1.

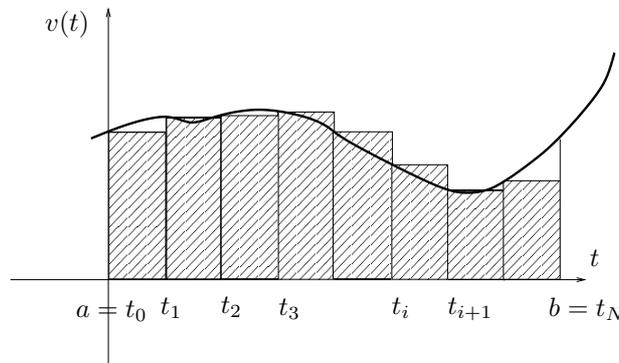


FIGURE E.1. L'aire sous la courbe avec des rectangles

Soit i dans $\{0, \dots, N-1\}$ fixé. Nous allons «tricher» et supposer que, dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, la vitesse v varie peu, de façon à remplacer la vitesse *a priori* quelconque par la vitesse constante $v(t_i)$. Cette approximation sera d'autant meilleure que h est petit (c'est-à-dire N grand). On a donc, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$v(t) \approx v(t_i)$$

La vitesse est constante et d'après (E.1), on a

$$v(t) \approx v(t_i) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_i)}{t - t_i}$$

et donc

$$x(t) \approx (t - t_i)v(t_i) + x(t_i)$$

En particulier

$$x(t_{i+1}) \approx (t_{i+1} - t_i)v(t_i) + x(t_i) = hv(t_i) + x(t_i).$$

soit encore

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx (t_{i+1} - t_i)v(t_i) = A_i, \quad (\text{E.7})$$

où

$$A_i = hv(t_i). \quad (\text{E.8})$$

Notons que $A_i = hv(t_i)$ représente l'aire sous la courbe $v(t)$ où $v(t) \approx v(t_i)$ entre t_i et t_{i+1} . C'est l'aire du rectangle de largeur h et de hauteur $v(t_i)$. Voir figure E.1 page précédente.

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} x(t_1) &\approx hv(t_1) + x(t_0) = hv(t_0) + x(a), \\ x(t_2) &\approx hv(t_2) + x(t_1) = h(v(t_0) + v(t_1)) + x(a), \\ x(t_3) &\approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2)) + x(a), \\ &\vdots \\ x(t_{i+1}) &\approx hv(t_i) + x(t_i) = h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_i)) + x(a), \\ &\vdots \\ x(t_N) &\approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_i) + \dots + v(t_{N-1})) + x(a). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$x(b) - x(a) \approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_i) + \dots + v(t_{N-1})) = h \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i). \quad (\text{E.9})$$

Cette formule fait apparaître «l'aire des rectangles», hachurée sur la figure E.1 page précédente. Quand le nombre N tend vers l'infini, cette aire tend vers l'aire qui est sous la courbe v entre a et b . Cette aire est notée $\int_a^b v(s)ds$. On a donc montré que

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(s)ds. \quad (\text{E.10})$$

L'équation (E.9) pourrait constituer une définition de l'intégrale, en passant à la limite. Elle constitue aussi une approximation de cette aire.

REMARQUE E.4 (Méthodes des rectangles à pas variable). Dans la méthode des rectangles, on n'est pas obligé de prendre un pas h constant. On peut découper l'intervalle en sous-intervalle de taille variable et remplacer (E.7) et (E.8) par

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx A_i, \quad (\text{E.11})$$

où

$$A_i = (t_{i+1} - t_i)v(t_i). \quad (\text{E.12})$$

REMARQUE E.5 (Méthodes des trapèzes à pas variable).

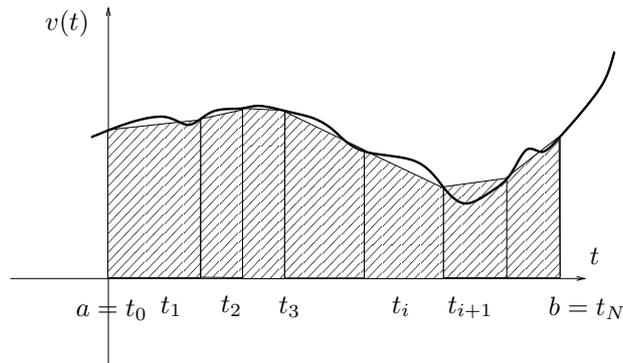


FIGURE E.2. L'aire sous la courbe avec des trapèzes

On peut aussi utiliser la méthode des trapèzes à pas variable, plus précise que celle des rectangles : (Voir figure E.2) on remplace, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $v(t)$ par une vitesse v linéaire. De sorte que l'aire approchée est remplacée par l'aire des trapèzes. On a donc

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx A_i, \quad (\text{E.13})$$

où

$$A_i = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)(v(t_i) + v(t_{i+1})). \quad (\text{E.14})$$

On a enfin

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(s)ds \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)(v(t_i) + v(t_{i+1})). \quad (\text{E.15})$$

Souvent, cette formule est utilisée pour h constant.

EXEMPLE E.6.

On se donne $a = 0$, $b = 0.05$. On suppose connue la vitesse v sur $[a, b]$. On donne $x(0) = 0$.

indice	temps	vitesse
0	0.00000	0.00000
1	0.00556	4.80498
2	0.01111	13.98215
3	0.01667	23.39208
4	0.02222	32.11241
5	0.02778	39.96245
6	0.03333	46.96467
7	0.03889	53.19819
8	0.04444	58.75250

TABLE E.1. Quelques vitesses

On pose $N = 9$, h est défini par $h = (b - a)/N$. Conformément à ce que l'on a vu ci-dessus, on donne les valeurs de $v(t_i)$ pour $i \in \{0, \dots, 8\}$; voir le tableau E.1.

- (1) En appliquant la formule (E.9), on cherche à proposer une approximation de $x(b)$.

On a $h = (b-a)/N = 0.0055555555555556$. On utilise la formule (E.9) page 73 et le tableau E.1 page précédente. On obtient

$$x(0.05) \approx 1.517607876$$

soit un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.1745875566$$

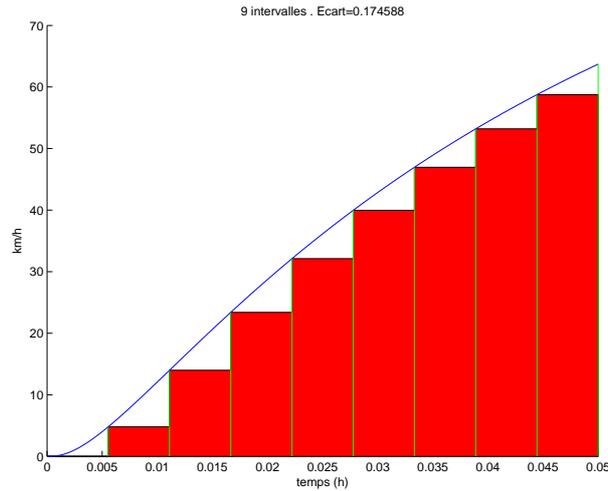


FIGURE E.3. La vitesse et l'aire approchée sous la courbe

Voir la figure E.3.

- (2) Si on compare avec la valeur exacte $x(0.05) = 1.692195433$, on obtient un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.1745875566$$

- (3) Pour $N = 49$, on calculerait de même

$$x(0.05) \approx 1.659764392$$

soit un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.03243104007$$

Voir la figure 4(a) page suivante.

- (4) Pour $N = 99$, on calculerait de même

$$x(0.05) \approx 1.676124522$$

soit un écart

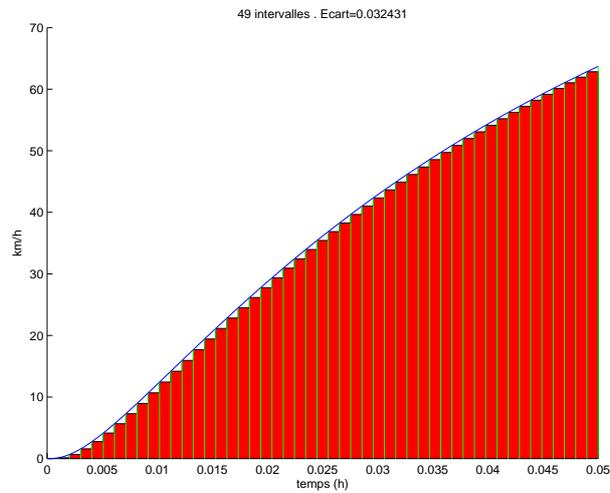
$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.01607091064$$

Voir la figure 4(b) page suivante. Les écarts diminuent bien quand N augmente!

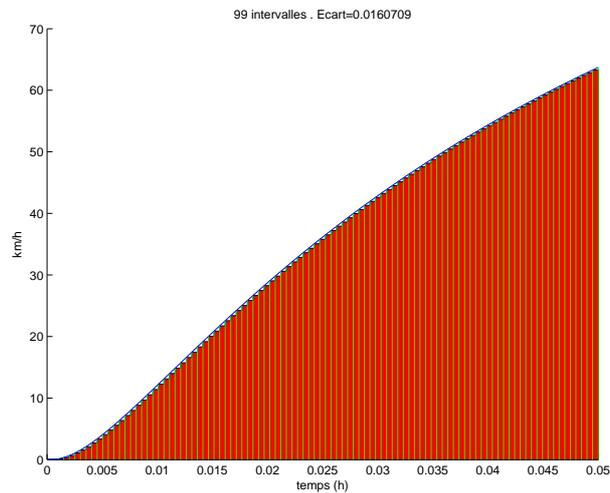
- (5)

Dans le tableau E.2 page 77, où on a pris des plus grandes valeurs de N , on constate que l'écart diminue bien.

Les exemples E.1, E.2, E.3 et E.6 nous ont donc montré une approche empirique de l'intégrale d'une fonction, comme aire sous la courbe, approchée par l'une des méthodes (E.9), (E.10) ou (E.15).



(a)



(b)

FIGURE E.4. La vitesse et l'aire approchée sous la courbe

E.3. «Le» principe

Finalement, retenons que si f est une fonction continue, on cherche une primitive F de f , définie à une constante additive près, c'est-à-dire, vérifiant

$$F'(t) = f(t), \quad (\text{E.16})$$

ce que l'on note

$$F(t) = \int f(t) dt. \quad (\text{E.17})$$

Naturellement, on peut étendre cette définition dans le cas où f n'est plus continue et lui donner un sens théorique en terme de limite.

Calculer l'intégrale de f entre a et b revient donc à calculer

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \quad (\text{E.18})$$

Nombre d'intervalles	valeur approchée	erreur
9	1.5176078759	0.1745875566
99	1.6761245219	0.0160709106
999	1.6906012074	0.0015942251
9999	1.6920361377	0.0001592949
99999	1.6921795043	0.0000159282
999999	1.6921938397	0.0000015928

TABLE E.2. Déplacements approchés et erreurs

qui correspond à l'aire sous la courbe représentative de f , comprise entre les deux abscisses a et b .

E.4. Intégrales impropres

On aura parfois à intégrer sur des intervalles finis ou infinis, des fonctions f qui ne sont pas continues partout. Par exemple, on posera

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt,$$

quantité qui existe. Ou alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{t^2} dt,$$

quantité qui existe.

Ces calculs sortent en principe du cadre de MNB où l'on intégrera que sur des intervalles finis où f est continue.

Le cadre de l'intégrale de Lebesgue, différent du contexte usuel en premier cycle de l'intégrale de Riemann, permet de s'affranchir de ce distinguo et de ne présenter qu'une seule théorie de l'intégration.

Pour plus de détail, voir l'annexe F.

E.5. Applications en MNB

Les formules des exemples E.1, E.2, E.3 et E.6 constituent en fait une approximation de $\int_a^b f(t) dt$ dans les cas (les plus nombreux en fait !) où la primitive de f n'est pas connue¹. Il conviendra en MNB de montrer que ces formules, dites des rectangles ou des trapèzes, convergent bien vers l'intégrale recherchée et de proposer une majoration de l'erreur, de façon qu'en prenant un nombre assez important d'intervalles, on est certain de calculer une approximation de la valeur exacte avec une erreur plus petite qu'un nombre donné à l'avance. On donnera bien entendu d'autres méthodes d'approximation d'intégrales. Voir par exemple [BM03] ou [DB21].

1. Souvent, pour l'ingénieur, f n'est connue qu'expérimentalement, par le biais de mesures et il n'est donc pas question de déterminer sa primitive de façon explicite !

Intégrales impropres

Dans le cadre de l'intégrale¹, on a défini des intégrales du type

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (\text{F.1})$$

où f est une fonction continue sur $[a, b]$ et a et b deux réels tels que $a < b$.

Il est possible d'étendre cette définition dans les cas où

- f n'est continue que sur $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ et n'admet pas de limite (ou une limite infinie) et a et/ou en b ;
- a et/ou b sont infinis.

De façon plus générale, on considère deux réels (finis ou infinis) $a \in \mathbb{R} \cup -\infty$ et $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$ on définira l'intégrale dite "impropre" suivantes :

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (\text{F.2})$$

de la façon suivante :

Si f continue sur $[a, b[$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx, \quad (\text{F.3a})$$

si f continue sur $]a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x)dx, \quad (\text{F.3b})$$

si f continue sur $]a, b[$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ d \rightarrow b}} \int_c^d f(x)dx. \quad (\text{F.3c})$$

en supposant que les limites évoquées existent.

Par exemple, on aura l'existence des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \\ & \int_0^1 \ln(x) dx, \\ & \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \\ & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

1. dite de Riemann qui est le cas de ce cours

Il existe en outre des techniques spécifiques pour montrer que ces différentes intégrales existent sans en connaître nécessairement des primitives. Voir par exemple [RDO88, section 7.2].

Quelques calculs de primitives

Cette annexe correspond à [RDO88, section 7.1].

G.1. Primitives de fractions rationnelles

On rappelle que toute fraction rationnelle P se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$P = E + \sum_k \frac{A_k}{(X - a_k)^{\alpha_k}} + \sum_k \frac{A_k X + B_k}{(X^2 + b_k X + c_k)^{\beta_k}},$$

où la partie principale E appartient à $\mathbb{R}[X]$, le deuxième terme correspond aux éléments de première espèce, et le troisième terme correspond aux éléments de seconde espèce (avec $X^2 + b_k X + c_k$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$).

G.1.1. Calcul des éléments de première espèce

Une primitive de $1/(X - a)^\alpha$ est

$$\frac{(X - a)^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} \text{ si } \alpha \neq 1, \quad \ln |X - a| \text{ si } \alpha = 1.$$

G.1.2. Calcul des éléments de seconde espèce

On met le dénominateur de l'élément de seconde espèce sous sa forme canonique

$$X^2 + bX + c = (X - p)^2 + q^2,$$

où $q > 0$ et on écrit

$$\int \frac{AX + B}{(X^2 + bX + c)^\beta} dX = A \int \frac{X - p dX}{((X - p)^2 + q^2)^\beta} + (B + Ap) \int \frac{dX}{((X - p)^2 + q^2)^\beta}.$$

G.1.2.1. Calcul du premier terme.

En écrivant $X - p = ((X - p)^2 + q^2)'/2$, il vient

$$\int \frac{X - p}{((X - p)^2 + q^2)^\beta} dX = \begin{cases} \frac{1}{2(-\beta + 1)} ((X - p)^2 + q^2)^{-\beta+1}, & \text{si } \beta \neq 1, \\ \frac{1}{2} \ln |(X - p)^2 + q^2|, & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

G.1.2.2. Calcul du second terme.

En posant

$$u = q^{-1}(X - p),$$

il vient $q^2 u^2 = (X - p)^2$ et donc

$$\int \frac{dX}{((X - p)^2 + q^2)^\beta} = q^{1-2\alpha} \int \frac{du}{(u^2 + 1)^\alpha}.$$

Pour calculer ce terme, on a deux méthodes (il ne faudra pas oublier d'exprimer, à la fin, u en fonction de X)
Première méthode (pour α inférieur ou égal à 3)

On pose

$$u = \operatorname{tg} \phi,$$

On a donc

$$\phi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u \text{ et } d\phi = \frac{du}{1+u^2}.$$

Ainsi, compte tenu de

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{1}{1+u^2},$$

on a

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha} = \int \cos^{2(\alpha-1)} \phi d\phi.$$

Cette fonction se calcule comme indiqué dans la section G.2.1

Seconde méthode (pour α supérieur à 4)

On pose

$$F_\alpha(u) = \int \frac{du}{(u^2+1)^\alpha}.$$

Par intégration par partie, il vient avec

$$U = \frac{1}{(u^2+1)^\alpha} \quad U' = -\frac{\alpha}{(u^2+1)^{\alpha+1}}$$

$$V' = 1 \quad V = u$$

$$2\alpha F_{\alpha+1}(u) = \frac{u}{(u^2+1)^\alpha} + (2\alpha-1)F_\alpha(u).$$

On peut conclure en initialisant cette relation de récurrence par

$$F_1(u) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u + k,$$

où k est une constante.

EXEMPLE G.1. Calculons

$$H(t) = \int \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2} dt.$$

On peut écrire

$$H(t) = -\frac{1}{2} \int (t^2+t+1)' (t^2+t+1)^{-2} dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}. \quad (\text{G.1})$$

Le premier terme de (G.1) est égal à

$$\frac{1}{2} (t^2+t+1)^{-1}.$$

On écrit le dénominateur du second terme de (G.1) sous sa forme canonique :

$$\frac{3}{2} \int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\left(\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right)^2}.$$

On fait le changement de variable

$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \left(t + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{G.2})$$

D'où

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du,$$

et le second terme de (G.1) est égal à

$$G(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 (u^2 + 1)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2}.$$

En posant

$$u = \operatorname{tg} \phi, \tag{G.3}$$

on a

$$du = (1 + \operatorname{tg}^2 \phi) d\phi,$$

et

$$G(t) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int \frac{d\phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int \cos^2 \phi d\phi.$$

Par linéarisation, il vient

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int (1 + \cos 2\phi) d\phi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \phi + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\phi.$$

Il faut revenir à la variable u (avec (G.3)) puis à la variable t (avec (G.2)). On pourrait donc écrire, selon (G.3), $\phi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u$, d'où

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin (2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u).$$

Cependant, il est plus simple de remarquer que

$$\sin 2\phi = \frac{2 \operatorname{tg} \phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Il vient

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{u}{1 + u^2}.$$

D'après (G.2), on a

$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \left(t + \frac{1}{2}\right)$$

et donc

$$G(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t + 1)\right) + \frac{1}{2} \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}.$$

Bref, on a

$$H(t) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t + 1)\right) + k.$$

G.2. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus

Soit $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ une fraction rationnelle à deux variables (c'est-à-dire, le rapport de deux polynômes à deux variables). On cherche des primitives de $f(t) = R(\cos t, \sin t)$.

Par exemple, si

$$R(X, Y) = \frac{3XY + 3X^2 + Y^4}{X + X^5Y^7},$$

alors

$$f(t) = \frac{3 \cos t \sin t + 3 \cos^2 t + \sin^4 t}{\cos t + \cos^5 t \sin^7 t}.$$

G.2.1. $R(X, Y)$ est un polynôme

Par linéarité, on se ramène au cas où

$$f(t) = \sin^p t \cos^q t,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$.

Premier cas : si p (resp. q) est impair, le changement de variable

$$x = \cos t \text{ (resp. } x = \sin t),$$

nous ramène à chercher des primitives d'un polynôme.

Second cas : si p et q sont pairs, on linéarise en passant par les complexes.

EXEMPLE G.2. Calculons

$$F(t) = \int \sin^3 t \cos^4 t dt.$$

Si on pose $x = \cos t$, on a $dx = -\sin t dt$; ainsi

$$F(t) = \int \cos^4 t \sin^2 t \sin t dt = \int \cos^4 t (1 - \cos^2 t) \sin t dt = - \int x^4 (1 - x^2) dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + k.$$

Donc, en revenant à la variable t

$$F(t) = \frac{\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^5 t}{5} + k.$$

EXEMPLE G.3. Calculons

$$F(t) = \int \sin^2 t \cos^4 t dt.$$

On linéarise simultanément $\sin^2 t$ et $\cos^4 t$ en utilisant les formules d'Euler :

$$\sin^2 t = \left(\frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) \right)^2 = -\frac{1}{2^2} (e^{2it} - 2 + e^{-2it}).$$

et

$$\cos^4 t = \left(\frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) \right)^4 = \frac{1}{2^4} (e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}).$$

En multipliant ces deux expressions, il vient

$$\sin^2 t \cos^4 t = -\frac{1}{2^6} (e^{6it} + e^{-6it} + 2e^{4it} + 2e^{-4it} - e^{2it} - e^{-2it} - 4),$$

et donc, en réutilisant les formules d'Euler,

$$\sin^2 t \cos^4 t = -\frac{1}{2^5} (\cos 6t + 2 \cos 4t - \cos 2t - 2).$$

Par intégration, il vient donc

$$F(t) = -\frac{\sin 6t}{192} - \frac{\sin 4t}{64} + \frac{\sin 2t}{64} + \frac{t}{16} + k.$$

G.2.2. $R(X, Y)$ n'est pas un polynôme*G.2.2.1. Méthode générale.*

On considère la nouvelle variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

Attention, cette formule est valable sur tout intervalle $]2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi[$ où $m \in \mathbb{Z}$ et ce calcul fournira des primitives définies *a priori* sur $]2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi[$. On utilise les formules de trigonométrie qui permettent d'exprimer le sinus et le cosinus d'un angle en fonction de la tangente de l'arc moitié (voir proposition I.29 page 115)

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad (\text{G.4})$$

$$\sin t = \frac{2u}{1 + u^2}. \quad (\text{G.5})$$

En exprimant u en fonction de t , il vient

$$2 \arctan u = t - 2m\pi \quad (\text{G.6})$$

et

$$dt = \frac{2du}{1 + u^2}. \quad (\text{G.7})$$

Ainsi, d'après (G.4), (G.5) et (G.7), on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\int f(t) dt = \int R(\cos t, \sin t) dt = \int R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right) \frac{2du}{1 + u^2}.$$

Nous donnons un exemple juste après.

G.2.2.2. Changement de variable simplificateurs (règles de Bioche).

si f est impaire, on pose $u = \cos t$.

si $f(\pi - t) = -f(t)$, on pose $u = \sin t$.

si $f(\pi + t) = f(t)$, on pose $u = \tan t$.

Avant d'appliquer la méthode générale, il faut toujours regarder si l'on peut d'abord appliquer l'une des trois règles de Bioche.

EXEMPLE G.4. On calcule

$$F(t) = \int \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Aucune des règles de Bioche n'est applicable et, d'après la méthode générale, on pose $u = \tan t/2$; ainsi,

$$F(t) = \int \frac{1}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u^2 + u + 1}.$$

Conformément à la méthode de calcul de primitives de fractions rationnelles, on écrit le dénominateur sous sa forme canonique

$$u^2 + u + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

et on pose

$$v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} \left(u + \frac{1}{2}\right).$$

On a donc

$$du = \frac{\sqrt{3}}{2} dv$$

et

$$F(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dv}{\frac{3}{4}(v^2+1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan v + k.$$

En revenant à la variable u , on a

$$F(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(u + \frac{1}{2} \right) \right) + k,$$

et, en revenant à la variable t , on a

$$F(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) \right) + k.$$

EXEMPLE G.5. On calcule

$$F(t) = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^5 t} dt.$$

D'après la deuxième règle de Bioche ($f(\pi - t) = -f(t)$), on pose $u = \sin t$. On a donc

$$F(t) = \int \frac{1-u^2}{u^5} du = \int \frac{du}{u^5} - \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{4u^4} + \frac{1}{2u^2} + k' = -\frac{1}{4\sin^4 t} + \frac{1}{2\sin^2 t} + k'.$$

On peut simplifier cette expression :

$$F(t) = -\frac{1-2\sin^2 t}{4\sin^4 t} + k' = -\frac{1-2\sin^2 t + \sin^4 t}{4\sin^4 t} + k,$$

où k est une autre constante réelle. Ainsi,

$$F(t) = -\frac{(1-\sin^2 t)^2}{4\sin^4 t} + k$$

Et donc

$$F(t) = -\frac{1}{4} \cotan^4 t + k.$$

G.3. Primitives de fractions rationnelles de sinus et cosinus hyperboliques

G.3.1. $R(X, Y)$ est un polynôme

Soit $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ une fraction rationnelle à deux variables. On cherche des primitives de $f(t) = R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$.

Par linéarité, on se ramène au cas où

$$f(t) = \operatorname{sh}^p t \operatorname{ch}^q t,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$. La méthode est identique au cas de la trigonométrie circulaire (cf. section G.2.1) :

Premier cas : si p (resp. q) est impair, le changement de variable

$$x = \operatorname{ch} t \text{ (resp. } x = \operatorname{sh} t),$$

nous ramène à chercher des primitives d'un polynôme.

Second cas : si p et q sont pairs, on linéarise en remplaçant sh et ch par leurs expressions en fonction de l'exponentielle.

G.3.2. $R(X, Y)$ n'est pas un polynôme

Les règles de Bioche ne fonctionnent pas ; mais la méthode de la section G.2.2.1 demeure valable :

On considère la nouvelle variable

$$u = \operatorname{th} \left(\frac{t}{2} \right).$$

Attention, cette formule est maintenant valable sur \mathbb{R} . On utilise les formules de trigonométrie hyperbolique qui permettent d'exprimer le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique d'un angle en fonction de la tangente hyperbolique de l'arc moitié

$$\operatorname{ch} t = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}, \quad (\text{G.8})$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{2u}{1 - u^2}. \quad (\text{G.9})$$

$$dt = \frac{2du}{1 - u^2}. \quad (\text{G.10})$$

Ainsi, d'après (G.8), (G.9) et (G.10), on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$\int f(t) dt = \int R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) dt = \int R\left(\frac{1 + u^2}{1 - u^2}, \frac{2u}{1 - u^2}\right) \frac{2du}{1 - u^2}.$$

On peut aussi se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en considérant la nouvelle variable

$$x = e^t.$$

Ainsi

$$dx = e^t dt,$$

et

$$\int f(t) dt = \int R_1(e^t) dt = \int R_1(x) \frac{dx}{x},$$

où R_1 est une fraction rationnelle.

EXEMPLE G.6. Calculons

$$F(t) = \int \frac{dt}{\operatorname{sh} t},$$

en posant $u = \operatorname{th} (t/2)$:

$$F(t) = \int \frac{1 - u^2}{2u} \frac{2du}{1 - u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + k.$$

Ainsi

$$F(t) = \ln |\operatorname{th} (t/2)| + k.$$

EXEMPLE G.7. Calculons

$$F(t) = \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^3 t + \operatorname{ch}^3 t - 1}.$$

On exprime les lignes trigonométriques en fonction de l'exponentielle :

$$F(t) = \int \frac{dt}{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^3 - 1} = 4 \int \frac{dt}{e^{3t} + 3e^{-t} - 4} = 4 \int \frac{e^t dt}{e^{4t} - 4e^t + 3}.$$

On pose $x = e^t$. Ainsi,

$$F(t) = \int \frac{dx}{x^4 - 4x + 3}.$$

On factorise le dénominateur sous la forme irréductible

$$x^4 - 4x + 3 = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$$

et on décompose en éléments simples. Tous calculs faits, on obtient :

$$F(t) = -\frac{2}{3} \frac{1}{e^t - 1} + \frac{2}{9} \ln \left(\frac{e^{2t} + 2e^t + 3}{(e^t - 1)^2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{9} \arctan \left(\frac{e^t + 1}{\sqrt{2}} \right) + k.$$

G.4. Intégrales abéliennes

Soit une fraction rationnelle $R \in \mathbb{R}(X, Y)$. Nous montrons dans cette section deux types de calculs de primitives ; dans la section G.4.1, nous étudierons les primitives de fonctions où intervient la racine n -ième d'une fonction homographe et dans la section G.4.2, nous étudierons les primitives de fonctions où intervient la racine d'un trinôme du second degré.

G.4.1. Fonction en racine n -ième d'une fonction homographe

Nous cherchons à déterminer

$$F(x) = \int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx,$$

où n est un entier naturel non nul et $a, b, c,$ et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$ (si $ad - bc = 0$, alors la fonction $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ est constante).

On pose

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Ainsi

$$y^n cx + y^n d = ax + b,$$

et

$$x = \frac{-y^n d + b}{y^n c - a}.$$

On a alors

$$dx = \frac{ny^{n-1}}{(cy^n - a)^2} (ad - bc) dy.$$

On est ramené au cas d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$F(x) = (ad - bc) \int R \left(\frac{-y^n d + b}{y^n c - a}, y \right) \frac{ny^{n-1}}{(cy^n - a)^2} dy.$$

EXEMPLE G.8. Soit à calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 + \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2},$$

on pose

$$y = \sqrt[6]{x}.$$

Ainsi

$$x = y^6 \text{ et } dx = 6y^5 dy.$$

D'où

$$F(x) = \int \frac{6y^5 dy}{y^3 + y^2} = 6 \int \frac{y^3 dy}{y + 1}.$$

Après réduction en éléments simples, il vient

$$F(x) = 6 \left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x}) \right) + k.$$

G.4.2. Fonction en racine carré d'un trinôme du second degré

Nous cherchons à déterminer

$$F(x) = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

où a , b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ (sinon, on se ramène au cas précédent avec $n = 2$). On considère le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Premier cas : $a < 0$.

Dans ce cas $\Delta > 0$ (sinon, $ax^2 + bx + c$ n'est positif que sur un singleton ou l'ensemble vide et, dans ce cas, F n'est pas définie). Ainsi, il existe $\alpha < \beta$ tels que

$$ax^2 + bx + c = (-a)(x - \alpha)(\beta - x).$$

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha).$$

Si $x \in]\alpha, \beta[$, alors $t \in \mathbb{R}_+$. On a

$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a},$$

et, après calculs,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = a \frac{(\alpha - \beta)t}{t^2 - a} \text{ et } dx = -2a \frac{\alpha - \beta}{(t^2 - a)^2} dt.$$

On est ramené au cas d'une primitive d'une fraction rationnelle puisque

$$F(x) = -2a(\alpha - \beta) \int R\left(\frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}, a \frac{(\alpha - \beta)t}{t^2 - a}\right) \frac{1}{(t^2 - a)^2} dt.$$

EXEMPLE G.9. Calculons

$$F(x) = \int \frac{x}{(-2x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

On a

$$-2x^2 + x + 1 = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (1 - x).$$

On travaille donc sur l'intervalle $] -1/2, 1[$. On pose

$$\sqrt{-2x^2 + x + 1} = t \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

Ainsi, après calculs,

$$x = \frac{2 - t^2}{t^2 + 2}.$$

et

$$F(x) = \frac{2}{9} \frac{x + 2}{\sqrt{-2x^2 + x + 1}} + k.$$

Deuxième cas : $a > 0$ et $\Delta < 0$.

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t \text{ ou } -x\sqrt{a} + t.$$

On se ramène alors au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

EXEMPLE G.10. Calculons

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + x + 1})^2}.$$

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t.$$

On a alors

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1} \text{ et } dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2} dt.$$

Il vient donc

$$F(x) = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t^2(2t + 1)^2} dt.$$

La fraction rationnelle à intégrer se décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{t^2 + t + 1}{t^2(2t + 1)^2} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{2t + 1} + \frac{\delta}{(2t + 1)^2}.$$

Après calculs, il vient

$$\frac{t^2 + t + 1}{t^2(2t + 1)^2} = -\frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{6}{2t + 1} + \frac{3}{(2t + 1)^2}.$$

Par intégration,

$$\begin{aligned} F(x) &= -3 \ln |t| - \frac{1}{t} + 3 \ln |2t + 1| - \frac{3}{2} \frac{1}{2t + 1}, \\ &= 3 \ln \left| 2 + \frac{1}{t} \right| - \frac{1}{2} \frac{3t + 2}{t(2t + 1)}. \end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale x selon

$$t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x,$$

il vient

$$F(x) = 3 \ln \left| 2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \right| - \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{x^2 + x + 1} + 3x + 2}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)(2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1)}.$$

Troisième cas : $a > 0$ et $\Delta > 0$.

On considère la nouvelle variable t définie par

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t \text{ ou } -x\sqrt{a} + t.$$

EXEMPLE G.11.

$$\int (x^2 + 6x + 5)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4}(x + 3)(x^2 + 6x - 1)\sqrt{x^2 + 6x + 5} + 6 \ln |x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 5}| + k.$$

Rappels des formules principales de la chute libre

Cette annexe est directement issue de [Bas18b, annexe "Rappels des formules principales de la chute libre"]

On se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, le point O correspondant à la position initiale du solide étudié (à $t = 0$).

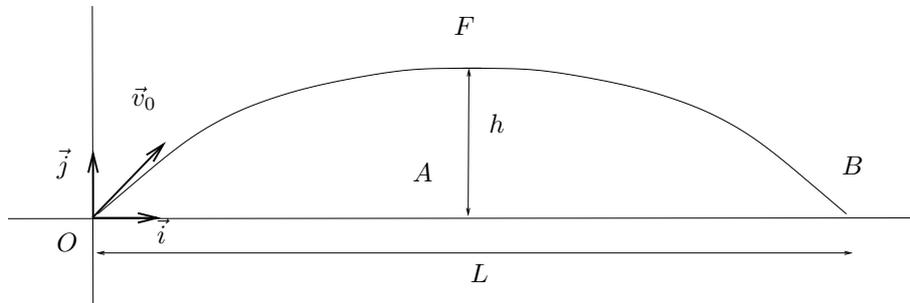


FIGURE H.1. Les conventions adoptées.

On appelle g la constante de gravité, v_0 la norme de la vitesse initiale, qui fait un angle α avec le vecteur \vec{i} . Voir la figure H.1.

- Équations paramétriques de la chute libre (le paramètre est le temps t) :

$$a_x(t) = 0, \quad (\text{H.1a})$$

$$a_y(t) = -g, \quad (\text{H.1b})$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (\text{H.1c})$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad (\text{H.1d})$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (\text{H.1e})$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (\text{H.1f})$$

- Équation cartésienne de la paraboles (valables si $\cos \alpha \neq 0$, c'est-à-dire si α n'est pas égal à $\pi/2$ ou un de ses multiples impairs)

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (\text{H.2})$$

- Longueur L (portée horizontale, distance OB) :

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (\text{H.3})$$

- hauteur h (distance FA , où F est la flèche de la parabole)

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (\text{H.4})$$

- demi-temps de vol t_2 (temps pour parcourir la partie de la parabole de 0 à F) :

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (\text{H.5})$$

Trigonométrie

I.1. Rappels et définitions de base

Section issue et adaptée de [Bas18a, Chapitre 3].

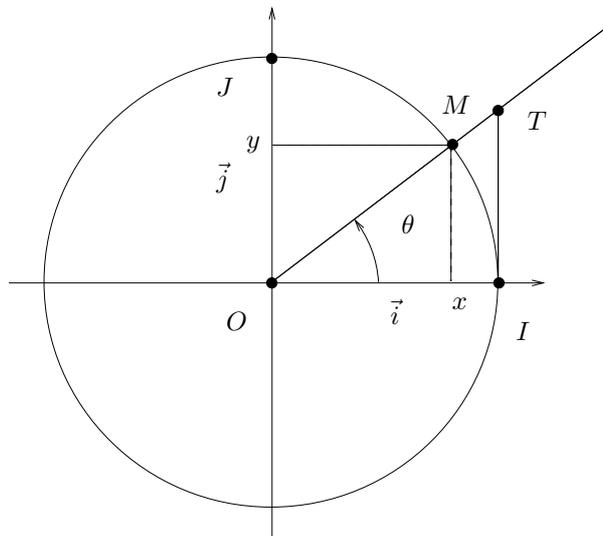


FIGURE I.1. Le cercle trigonométrique.

Dans tout ce chapitre, les angles sont orientés dans le sens trigonométrique (antihoraire).

On rappelle la définition des lignes trigonométriques (voir figure I.1) :

On se donne (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé direct.

Soit θ un angle (en radians ou en degrés). On considère le point M , de coordonnées x et y telles que

$$\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} = \theta.$$

Le triangle¹ OxM est rectangle en x ; ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (\text{I.1})$$

Le radian est récent dans les mathématiques ; pourquoi l'utilise-t-on ? Voir par exemple la section I.3.2 ou <http://fr.wikipedia.org/wiki/Radian> \diamond

Par définition, on a

$$x = \cos \theta, \quad (\text{I.2a})$$

$$y = \sin \theta. \quad (\text{I.2b})$$

1. Par abus de notation, on confond x et le point $(x, 0)$

Autrement dit $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont définis comme étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M .

Cette équation fournit donc x et y en fonction de θ . D'après (I.1), on obtient la première formule de trigonométrie² :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad (\text{I.3})$$

Ici, on note $\cos^2 \theta$ à la place de $(\cos \theta)^2$.

Réciproquement, si deux réels x et y de $[-1, 1]$ vérifient (I.1), il existe un unique θ vérifiant (I.2). Cet angle est défini modulo 2π radians ou 360 degrés. Grâce à la calculatrice, il faudrait utiliser les fonction réciproques des fonctions \cos et \sin , en faisant attention au quart de plan où se trouve le point M (voir la remarque I.7)! On rappelle que l'on passe des degrés aux radians en utilisant la mesure d'un angle plat : 180° ou π radians. On a donc, d'après la règle de trois, si θ_r désigne la mesure d'un angle en radians et θ_o en degrés, on a

$$\begin{aligned} \theta_o &= \theta_r \times \frac{180}{\pi}, \\ \theta_r &= \theta_o \times \frac{\pi}{180}. \end{aligned}$$

Remarquons aussi, que si θ n'est pas un multiple impair d'un angle droit $\pi/2$, la droite (OM) coupe la droite perpendiculaire à (OI) passant par I au point T (voir figure I.1). Notons t l'ordonnée de T . D'après le théorème de Thalès, il vient

$$\frac{xM}{IT} = \frac{Ox}{OI},$$

soit

$$\frac{\sin \theta}{t} = \frac{\cos \theta}{1}, \quad (\text{I.4})$$

et donc

$$t = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (\text{I.5})$$

On a donc une lecture graphique de la tangente, définie comme

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (\text{I.6})$$

Cette relation est vraie tant que θ n'est pas un multiple impair d'un angle droit. Le domaine de définition D de la tangente est donc donné (si on exprime les angles en radians) par

$$D = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (\text{I.7})$$

2. Et elles sont légions !

PROPOSITION I.1. *On a (pour des angles exprimés en radians) :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) \in [-1, 1], \quad (\text{I.8a})$$

$$\sin(x) \in [-1, 1], \quad (\text{I.8b})$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad (\text{I.8c})$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad (\text{I.8d})$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad (\text{I.8e})$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad (\text{I.8f})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad (\text{I.8g})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad (\text{I.8h})$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad (\text{I.8i})$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad (\text{I.8j})$$

$$\forall x \in D, \quad \tan(-x) = -\tan x, \quad (\text{I.8k})$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad (\text{I.8l})$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \quad (\text{I.8m})$$

DÉMONSTRATION. Démonstrations simples, laissées au lecteur et qui peuvent se faire de façon géométrique. Démontrons la dernière formule (I.8m) qui provient de

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}, \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION I.2.

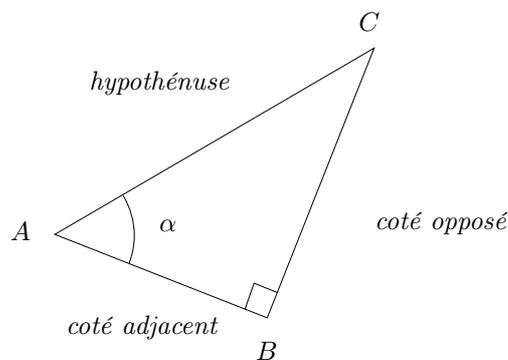


FIGURE I.2. L'angle α dans la triangle rectangle ABC .

On considère un triangle rectangle ABC et α l'un des deux angles non droits (voir figure I.2 page précédente).
On a, par rapport à cet angle :

$$\cos \alpha = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}, \quad (\text{I.9a})$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}}, \quad (\text{I.9b})$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}. \quad (\text{I.9c})$$

DÉMONSTRATION. En effet, les triangles OxM de la figure I.1 et ABC de la figure I.2 sont semblables (ils ont les mêmes angles) et le théorème de Thalès permet de conclure sur les égalités respectives de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ avec $\frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$ et $\frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}}$. De même le triangles OIT de la figure I.1 et ABC de la figure I.2 sont semblables (ils ont les mêmes angles) et le théorème de Thalès permet de conclure sur l'égalité $\tan \alpha$ et avec $\frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$. \square

REMARQUE I.3. On peut aussi introduire des angles de vecteurs, définis modulo 2π ou 360 .

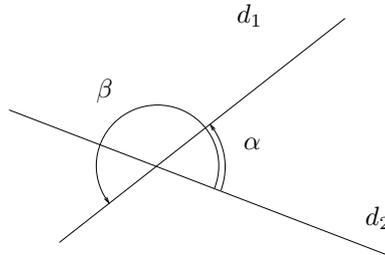


FIGURE I.3. Angle de droites.

De même, on parle d'angle de droites, définis cette fois-ci modulo π ou 180 . Sur la figure I.3, on a représenté les deux mesures identiques α et β de l'angle entre les droites d_1 et d_2 .

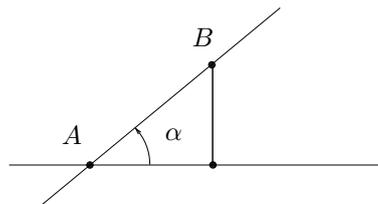


FIGURE I.4. Angle de droite et l'horizontale.

Grâce à la proposition I.2, on peut montrer (voir figure I.4) que si α désigne l'angle entre la droite (AB) et l'horizontale (portée par \vec{i}), alors

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \quad (\text{I.10})$$

REMARQUE I.4. Grâce à (I.10) et la notion de pente d'une droite vue on peut maintenant comprendre le rapport entre la pente d'une droite et celle d'une route, donnée en pourcentage et qui coïncident. En effet, la notion de pente a d'une droite, signifie que si on se déplace d'un pas vers la droite, on monte de a sur la droite (si a est positif) ou on descend de $|a|$ (si a est négatif). Pour une route, c'est identique : la pente de la route (si elle est droite) est la pente de la droite. Puisque'elle est exprimée en pourcentage, un pente de $p\%$ signifie que si on se déplace de 100 m., à l'horizontal (et non en suivant la route!), alors on monte de p m.

Pentes (%)	Angles (degrés)	Angles (radians)	Pentes
100	45	0.78539816	1
15	8.53076561	0.14888995	0.15
5	2.86240522	0.04995839	0.05
1	0.57293870	0.00999967	0.01
0.2	0.11459141	0.00200000	0.0020
0	0	0	0

TABLE I.1. Le rapport entre pente et angle, en degré ou en radian

Ainsi, d'après ou (I.10) appliqués avec $y_B - y_A = p$ et $x_B - x_A = 100$, on a alors le lien entre la pente p (en pourcentage) et l'angle α :

$$\tan \alpha = \frac{p}{100}. \quad (\text{I.11})$$

soit encore

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p}{100}\right). \quad (\text{I.12})$$

Par exemple une pente de valeur $p = 5\%$ correspond à un angle donné par

$$\alpha = \arctan\left(\frac{5}{100}\right) = 2.8624^\circ. \quad (\text{I.13})$$

Voir aussi le tableau I.1, qui montre l'avantage du radian par rapport au degré ! En effet, les données de la dernière colonne (p exprimé de façon absolue, sans pourcentage) sont de plus en plus proches de celle de la troisième colonne (angles en radians) quand la pente est faible.

REMARQUE I.5. En effet, si p est exprimé de façon absolue, l'égalité (I.11) devient

$$\tan \alpha = p. \quad (\text{I.14})$$

Si α est "petit", on a

$$\tan \alpha \approx \alpha \quad (\text{I.15})$$

et donc, (I.14) fournit

$$\alpha \approx p.$$

Cela n'est valable que quand *l'angle est en radian* ! L'égalité (I.15) sera justifiée dans la section I.3.2. Cela nous montre que *le radian est l'unité légale des lignes trigonométriques*. Dès que l'on utilisera le résultats de dérivée de la section I.3.2, *les angles doivent être absolument exprimés en radians* !

DÉFINITION I.6. On évoque aussi les coordonnées polaire (r, θ) de la façon suivante (voir figure I.5 page suivante) : un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) a pour coordonnées polaires (r, θ) où r est la distance OM et θ l'angle (\vec{i}, \widehat{OM}) . On a donc

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{I.16a})$$

$$x = r \cos \theta, \quad (\text{I.16b})$$

$$y = r \sin \theta \quad (\text{I.16c})$$

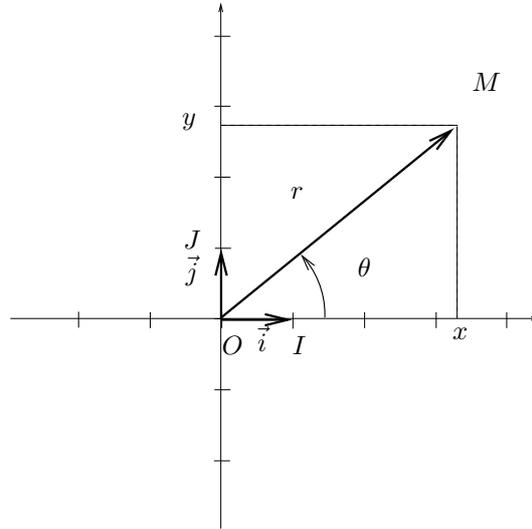


FIGURE I.5. Les coordonnées cartésiennes et polaires

Si x et y sont connus, on détermine d'abord r . On cherche ensuite l'unique angle θ vérifiant

$$\frac{x}{r} = \cos \theta, \quad (\text{I.17a})$$

$$\frac{y}{r} = \sin \theta \quad (\text{I.17b})$$

ce qui est possible puisque les deux nombres $X = x/r$ et $Y = y/r$ vérifient $X^2 + Y^2 = 1$.

Remarquons que les équations (I.2a) et (I.2b) sont un cas particulier de (I.16b) et (I.16c).

REMARQUE I.7. La fonction atan_2 , utilisée par Matlab (de nom `atan2`) est souvent utilisée pour définir l'angle polaire θ en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y) , vérifiant

$$x = r \cos \theta, \quad (\text{I.18a})$$

$$y = r \sin \theta, \quad (\text{I.18b})$$

grâce à l'égalité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \quad \theta = \text{atan}_2(y, x), \quad (\text{I.19})$$

voire même parfois (ce qui est le choix de Matlab)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta = \text{atan}_2(y, x). \quad (\text{I.20})$$

Voir par exemple l'annexe J.

◇

La trigonométrie, associée à une calculatrice, constitue en fait « un rapporteur numérique ». En effet, elle nous donne les liens qui existent entre les cotés et les angles dans un triangle. Avec une calculatrice, elle permet de tracer ou de mesurer des angles, sans rapporteur !

(1)

En effet, si un angle $\theta = (\widehat{Ox, Oy})$ (aigu) est donné sur une figure (voir figure I.6 page suivante), on trace un triangle OAB rectangle et on cherche à déterminer θ vérifiant

$$\cos \theta = \frac{OA}{OB},$$

$$\sin \theta = \frac{AB}{OB}$$

grâce aux fonctions réciproques.

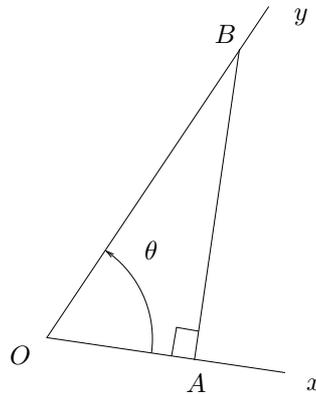


FIGURE I.6. Mesurer un angle avec la trigonométrie

EXERCICE I.8.

Mesurer de cette façon l'angle θ de la figure I.6.

(2)

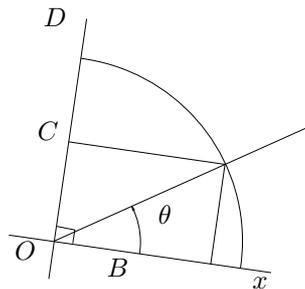


FIGURE I.7. Tracer un angle avec la trigonométrie

Réciproquement, si on veut tracer un angle θ donné, à partir d'une demi-droite $[Ox)$ (voir figure I.7), on calcule son cosinus (resp. sinus) ; on trace ensuite un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R quelconque, puis on trace le point $B \in [Ox)$ (resp. le point C sur D , la droite perpendiculaire $[Oy)$, passant par O) tel que $OB = R \cos \theta$ (resp. $OC = R \sin \theta$). Enfin, on trace M l'intersection de la droite passant par B (resp. C) perpendiculaire à $[Ox)$ (resp. D) et du cercle \mathcal{C} . On a alors

$$\theta = \widehat{[Ox, \overrightarrow{OM}}.$$

Sans compas on peut aussi utiliser simultanément le sinus et le cosinus, ou alors la tangente seule.

EXERCICE I.9.

Tracer de même un angle égal à $27,3^\circ$

Rappelons pour finir une règle empirique pour se rappeler les lignes trigonométriques de quelques angles remarquables : on remplit successivement un tableau de la manière suivante (voir calcul de ces lignes trigonométriques particulières dans l'exercices I.14) :

- (1) On remplit la ligne des sinus avec les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et celles de cosinus avec les mêmes valeurs, dans l'ordre inverse :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	4	3	2	1	0
$\sin \theta$	0	1	2	3	4

- (2) On prend la racine carrés de ces nombres :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$
$\sin \theta$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

- (3) On divise les nombres obtenus par 2 :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
$\sin \theta$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$

- (4) On simplifie les nombres obtenus et on obtient les différentes valeurs exactes des sinus et des cosinus :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

I.2. Quelques exercices

I.2.1. Énoncés

EXERCICE I.10.

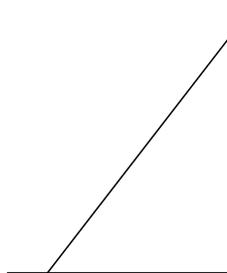


FIGURE I.8. Une échelle.

Une échelle, qui mesure 5 m., est adossée à un mur. La distance du pied de l'échelle au pied du mur est de 2,5 m. Donner l'angle entre l'échelle et le sol.

Voir éléments de correction page 101.

EXERCICE I.11.

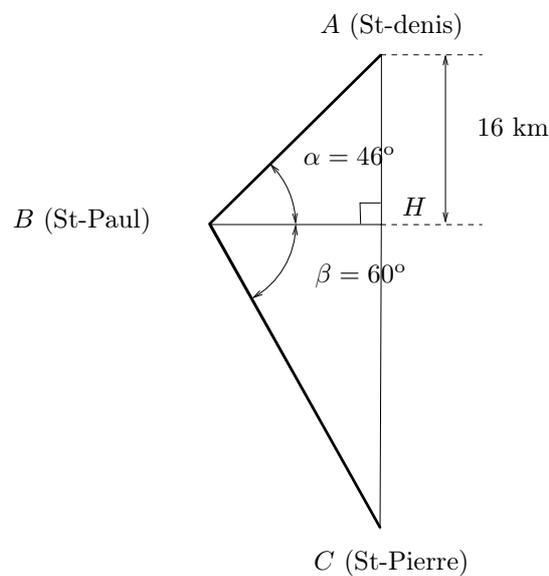


FIGURE I.9. Le trajet Saint-Denis Saint-Pierre via Saint-Paul.

Un oiseau veut aller de St-Denis à St-Pierre en passant par St-Paul (distance en gras sur la figure I.9).

- (1) Tracer sur une feuille la figure I.9, avec une échelle appropriée, pour vérifier que le problème est bien posé.
- (2) Calculer la distance totale parcourue par l'oiseau.

Voir éléments de correction page 102.

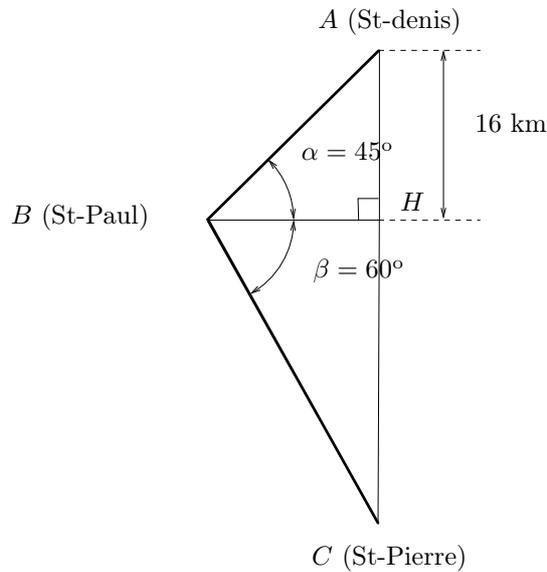


FIGURE I.10. Le trajet Saint-Denis Saint-Pierre via Saint-Paul.

EXERCICE I.12.

Refaire la même chose pour la figure I.10, sans aucun calcul de trigonométrie! Seule la valeur de α a changé!

Voir éléments de correction page 103.

EXERCICE I.13.

Donnons une application directe de la trigonométrie. On se donne une vitesse \vec{v}_0 de norme $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$ et qui fait un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale.

- (1) Faire une figure et y tracer v_{0x} et v_{0y} , les composantes horizontales et verticales de la vitesse, c'est-à-dire, l'abscisse et l'ordonnée du vecteur \vec{v}_0 .
- (2) Calculer v_{0x} et v_{0y} .

Voir éléments de correction page 103.

EXERCICE I.14.

- (1) (a) Tracer, à la règle est au compas, un triangle équilatéral de côté 1.
(b) En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\pi/3$ (ou 60°).
- (2) Faire de même pour le tracer et le calcul des lignes trigonométriques de $\pi/6$.
- (3) Faire de même pour le tracer et le calcul des lignes trigonométriques de $\pi/4$.

Voir éléments de correction page 103.

EXERCICE I.15.

Sauriez-vous tracer à la règle et au compas la construction du pentagone et en déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $2\pi/5$?

Voir éléments de correction page 106.

I.2.2. Corrections

CORRECTION DE L'EXERCICE I.10

D'après la propriété I.2 page 94, on a

$$\cos \alpha = \frac{2.5}{5} = 0,5.$$

En calculant le rapport de droite et en utilisant la fonction réciproque de la fonction sinus, on trouve (attention aux unités)

$$\alpha = 60^\circ$$

CORRECTION DE L'EXERCICE I.11

- (1) En utilisant le fait que dans le triangle ABH , la somme des deux angles non droits est égale à $\pi/2$, on peut tracer la figure : on trace successivement et dans cet ordre : H , A , B , puis C .
- (2) Dans le triangle rectangle AHB , on a

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AB},$$

et donc

$$AB = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(46)} = 22,242$$

On en déduit ensuite de même

$$BH = \frac{AH}{\tan \alpha} = \frac{16}{\tan(46)} = 15,451$$

De même, dans le triangle rectangle BHC , on a

$$\cos \beta = \frac{BH}{BC},$$

et donc

$$BC = \frac{BH}{\cos \beta} = \frac{15,451}{\cos(60)} = 30,902$$

et donc, on a (en km), $L = AB + BC$, soit encore

$$L = 53,144. \tag{I.21}$$

REMARQUE I.16. On vous demandera de faire un calcul littéral en gardant les symboles « le plus longtemps possible » et de ne faire l'application numérique à la fin. Il serait donc préférable pour cet exercice d'écrire plutôt pour le corrigé de la question 2 :

$$AB = \frac{AH}{\sin \alpha},$$

puis

$$BH = \frac{AH}{\tan \alpha},$$

et enfin

$$BC = \frac{BH}{\cos \beta},$$

qui devient donc

$$BC = \frac{AH}{\tan \alpha \cos \beta}.$$

Ainsi, $L = AB + BC$ et donc

$$L = \frac{AH}{\sin \alpha} + \frac{AH}{\tan \alpha \cos \beta}. \tag{I.22}$$

soit encore

$$L = AH \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha \cos \beta} \right). \tag{I.23}$$

L'application numérique fournit alors

$$L = 16 \times \left(\frac{1}{\sin(46)} + \frac{1}{\tan(46) \cos(60)} \right), \quad (\text{I.24})$$

ce qui donne naturellement la même valeur que (I.21).

CORRECTION DE L'EXERCICE I.12

L'angle \widehat{HAB} est égal à $\alpha = 45^\circ$; ainsi, HAB est isocèle et

$$BH = 16 \quad (\text{I.25})$$

Grâce au théorème de Pythagore, on en déduit que

$$AB = 16 \times \sqrt{2} = 22,627.$$

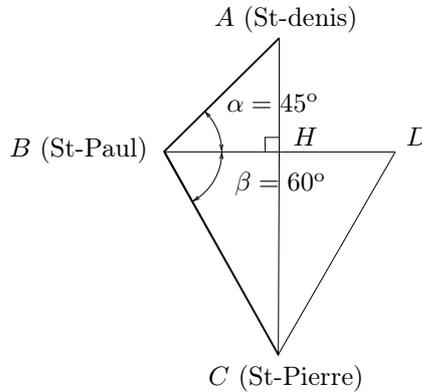


FIGURE I.11. la triangle BDC équilatéral.

Par ailleurs, si l'on trace le point D symétrique de B par rapport à (AC) (voir figure I.11), on constate que, par symétrie, $\widehat{HDC} = \beta = 60^\circ$, donc BDC est équilatéral et donc, grâce à (I.25),

$$BC = BD = 2BH = 32$$

et donc

$$L = AB + BC = 22,62753 + 32 = 54,627. \quad (\text{I.26})$$

ce qui est légèrement différent de (I.21).

CORRECTION DE L'EXERCICE I.13

Le « triangle » v_{0x} , \vec{v}_0 et v_{0y} est rectangle. On en tire

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_{0x}}{v_0}, \\ \sin \alpha &= \frac{v_{0y}}{v_0}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha = 10 \cos 30 = 8,6602, \\ v_{0y} &= v_0 \sin \alpha = 10 \sin 30 = 5. \end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE I.14

(1)

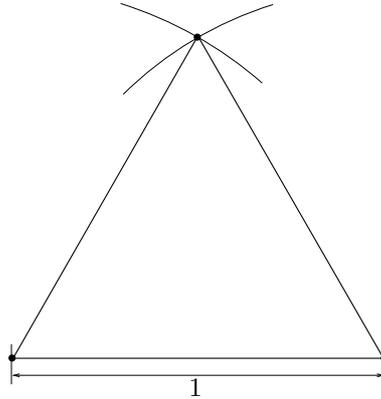


FIGURE I.12. Tracé d'un triangle équilatéral.

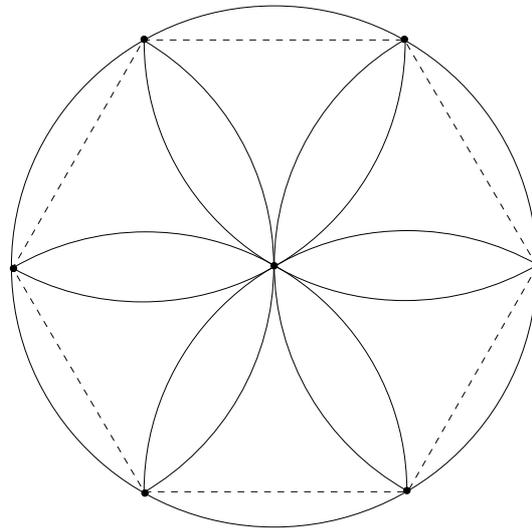


FIGURE I.13. La rosace (et l'héxagone qui la soutent, en pointillé).

(a)

On renvoie à la figure I.12.

Si on répète cette figure, on obtient la célèbre rosace que tracent tous les écoliers (figure I.13). Voir par exemple <https://blogdemaths.wordpress.com/2013/08/18/comment-tracer-un-hexagone-regulier/>.

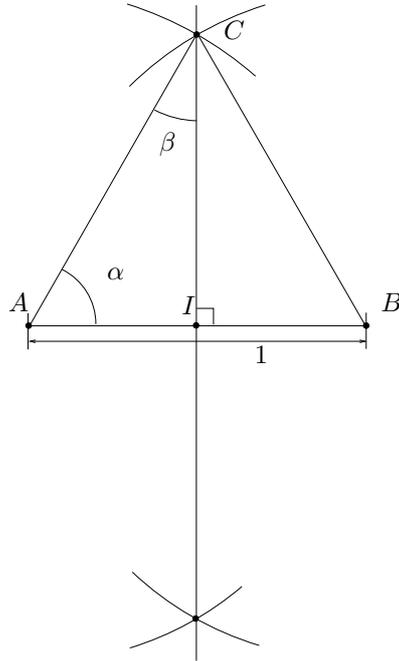
(b)

On peut prolonger les cercles de l'autre cotés de la base du triangle équilatéral construit, comme le montre la figure I.14, et en déduire la construction de la médiatrice (IC) du segment $[AB]$, le point I étant le milieu de $[AB]$. La droite (IC) est donc aussi perpendiculaire à (AB) . Puisque le triangle ABC est équilatéral, on a

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Par définition, on a aussi

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = AI.$$

FIGURE I.14. Valeurs du sinus et du cosinus de $\pi/3$.

Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a donc $AI = 1/2$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}. \quad (\text{I.27})$$

Par définition, on a aussi

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = IC,$$

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle AIC , on a

$$IC = \sqrt{AC^2 - AI^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

et donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{I.28})$$

(2)

(a)

Il suffit de faire la figure I.14 et de remarquer que si on pose

$$\widehat{(\vec{CA}, \vec{CI})} = \beta,$$

alors, puisque $\alpha + \beta = \pi/2$, on a

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

(b) On déduit donc finalement de (I.8g), (I.8h), (I.27) et (I.28) que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (\text{I.29a})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{I.29b})$$

(3)

(a)

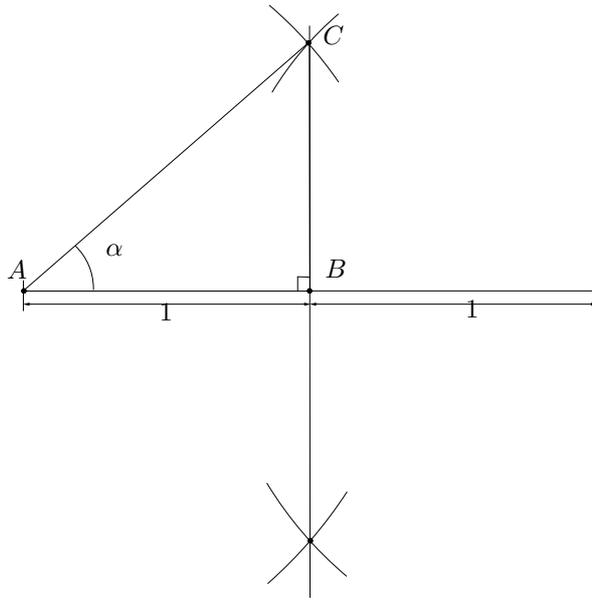


FIGURE I.15. Un triangle rectangle isocèle de coté 1.

Il suffit de tracer facilement à la règle et au compas, un triangle rectangle isocèle de coté 1, comme le montre la figure I.15, ce qui fait apparaître l'angle α défini par

$$\alpha = \left(\widehat{\vec{BA}, \vec{BC}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Le théorème de Pythagore donne donc

$$AB = \sqrt{2}$$

et, par exemple, en utilisant (I.9), on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (\text{I.30a})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{I.30b})$$

REMARQUE I.17. Si on sait construire à la règle et au compas, une certaine longueur, on sait qu'il est possible de calculer cette longueur en fonction d'un certain nombre de symbole $\sqrt{\quad}$. Plus de détails dans [Car84] où sont proposées d'autres constructions, notamment de polygones réguliers.

◇

CORRECTION DE L'EXERCICE I.15

Voir [Bas22d, section "Plusieurs problèmes de géométrie" de l'annexe "Nombres complexes"].

I.3. Autres rappels

La plupart des résultats présentés dans cette sections peuvent être facilement obtenus en passant dans le corps des complexes et en utilisant l'exponentielle complexe (voir par exemple [Bas22d, "Séries entières et fonctions usuelles sur \mathbb{C} " et annexe "Nombres complexes"]), qui sont parfois présentés ici. Ici le parti pris consiste aussi à présenter des preuves purement géométriques et d'en déduire éventuellement d'autres résultats par des calculs algébriques simples.

I.3.1. Sommes d'angles et angles doubles

PROPOSITION I.18. *On a*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad (\text{I.31a})$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a. \quad (\text{I.31b})$$

DÉMONSTRATION. Montrons que (I.31) est vraie.

Proposons plusieurs preuves du résultat (I.31), en finissant par une preuve géométrique pure.

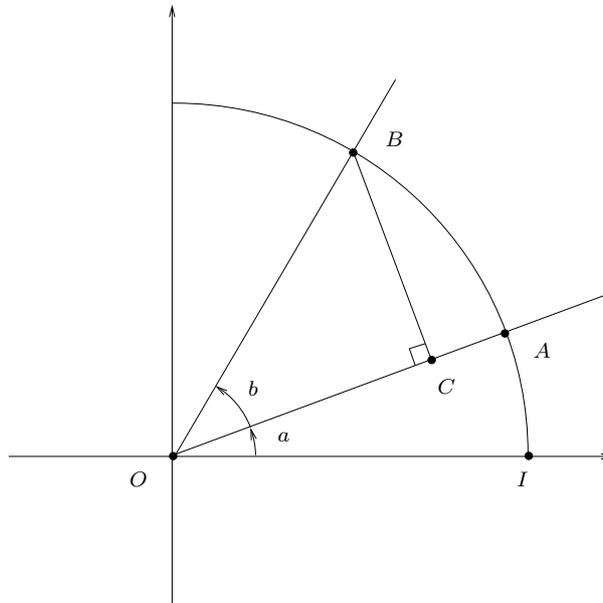


FIGURE I.16. les angles a et b .

On considère (voir figure I.16) le cercle trigonométrique de centre O , A et B , deux points de ce cercle qui définissent les angles a et b , ainsi que C , le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) , de sorte que

$$OC = \cos b, \quad (\text{I.32a})$$

$$CB = \sin b. \quad (\text{I.32b})$$

(1) De façon vectorielle, on a (dans la base vectorielle habituelle (\vec{i}, \vec{j}))

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad (\text{I.33})$$

et si on fait tourner ce vecteur par une rotation d'angle $\pi/2$, on obtient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{pmatrix} \quad (\text{I.34})$$

Ainsi, on écrit, d'après (I.32), (I.33) et (I.34) :

$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \vec{OC} + \vec{CB}, \\ &= OC \vec{OA} + CB \vec{u}, \\ &= \cos b \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} + \sin b \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On conclue en identifiant avec la définition

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) \\ \sin(a+b) \end{pmatrix}.$$

- (2) Faisons ce calcul plus rapidement en utilisant l'exponentielle complexe, qui ne fait que traduire tout cela de façon (voir par exemple [Bas22d, Annexe "Nombres complexes"]). On écrit

$$z_B = z_A e^{ib} = e^{ia} e^{ib},$$

et donc

$$\begin{aligned}e^{(a+b)i} &= e^{ia} e^{ib}, \\ &= (\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b), \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i (\sin a \cos b + \cos a \sin b),\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure en remplaçant $e^{(a+b)i}$ par sa valeur et en prenant partie réelle et imaginaire :

$$\cos(a+b) + i \sin(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i (\sin a \cos b + \cos a \sin b).$$

REMARQUE I.19. Cette preuve, très simple, peut constituer un moyen mnémotechnique pour retrouver ce résultat !

- (3) Faisons ce calcul de façon maintenant purement géométrique.

Nous nous restreignons ici, pour cela, au cas où a et b sont dans $]0, \pi/2[$ et tels que $a+b \in]0, \pi/2[$. On laisse au lecteur le soin d'en déduire de façon algébrique que le résultat montré est encore vrai pour tout a et b dans \mathbb{R} .

(a)

Aux points déjà introduits dans la figure I.16, on rajoute (voir figure I.17) :

- D , le projeté orthogonal de A sur l'axe des x ;
- E , le projeté orthogonal de C sur l'axe des x ;
- F , le projeté orthogonal de B sur l'axe des x ;
- G , l'intersection de (BF) avec (OA) ;
- H , le projeté orthogonal de C sur la droite (BF) .
- J , le projeté orthogonal de G sur la droite (CE) .

Ainsi, on

$$\widehat{(\vec{GJ}, \vec{GC})} = a,$$

et donc, puisque le triangle CHB est rectangle,

$$\widehat{(\vec{CG}, \vec{GH})} = \frac{\pi}{2} - a,$$

et puisque le triangle GCB est rectangle, on a

$$\widehat{(\vec{BG}, \vec{BC})} = \frac{\pi}{2} - \widehat{(\vec{CG}, \vec{GH})} = a,$$

et donc

$$HC = BC \sin a,$$

et donc, d'après (I.32b)

$$HC = \sin a \sin b. \tag{I.35}$$

Par ailleurs, dans le triangle rectangle OFG , on a

$$\frac{OF}{OG} = \cos a,$$

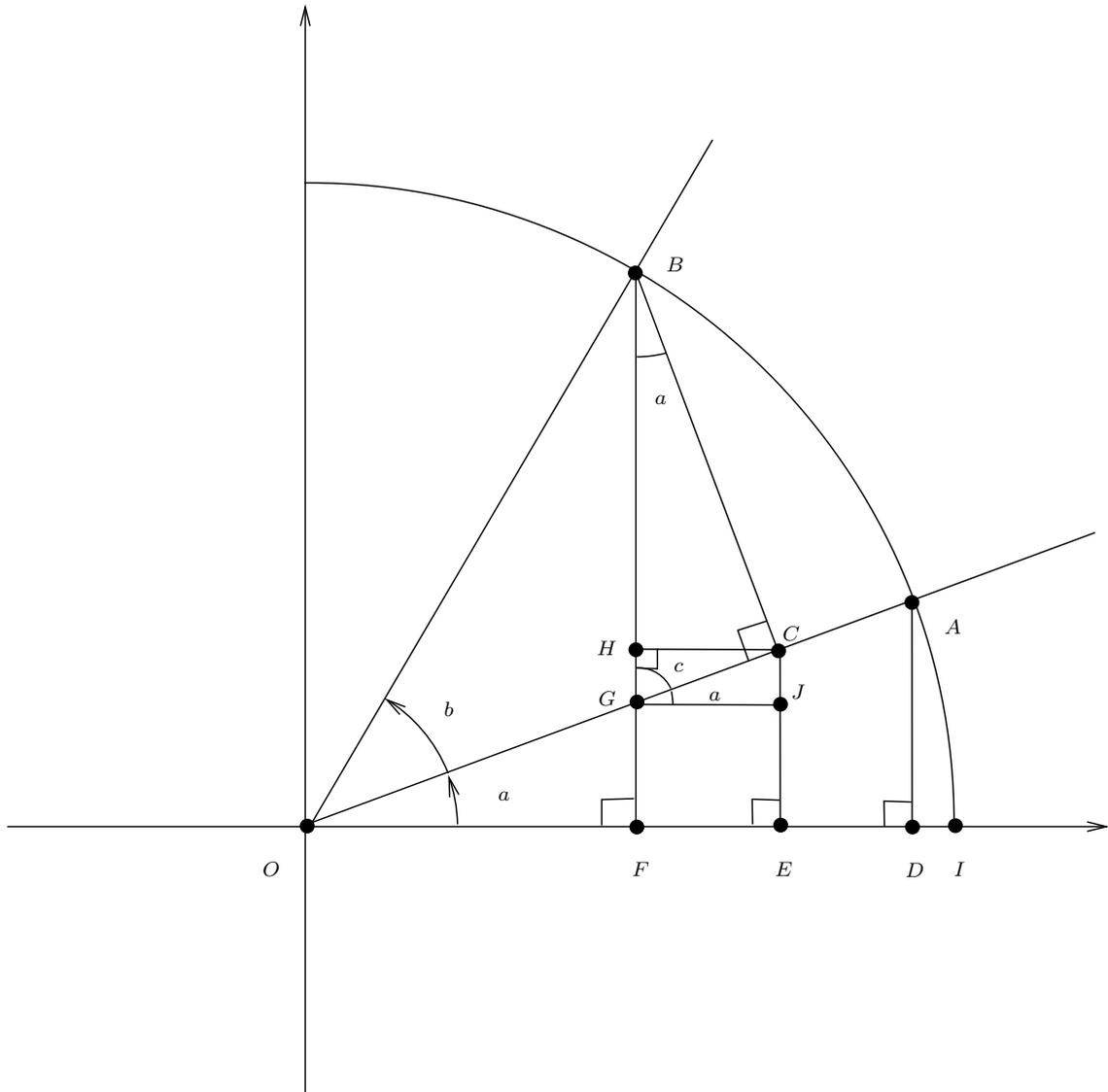


FIGURE I.17. les angles a , b et $c = \pi/2 - a$ et les points A à J .

et on a successivement

$$\begin{aligned} OF &= OG \cos a, \\ &= (OC - CG) \cos a, \end{aligned}$$

et, d'après (I.32a)

$$OF = \cos a \cos b - CG \cos a. \tag{I.36}$$

On a aussi, dans le triangle rectangle CGJ :

$$\frac{GJ}{CG} = \cos a.$$

et donc, d'après (I.36),

$$OF = \cos a \cos b - GJ,$$

et donc

$$OF = \cos a \cos b - HC. \tag{I.37}$$

Enfin, d'après (I.35) et (I.37), il vient donc

$$OF = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

ce qui nous montre que

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (\text{I.38})$$

(b) On peut faire une autre preuve géométrique mais il est plus rapide d'appliquer (I.38) à $\pi/2 - a$ et b de sorte que l'on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b,$$

et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

et donc

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

et en remplaçant b par $-b$:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \quad (\text{I.39})$$

□

◇

PROPOSITION I.20. On a

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}, \quad \cos(P) - \cos(Q) = -2 \sin\left(\frac{P+Q}{2}\right) \sin\left(\frac{P-Q}{2}\right), \quad (\text{I.40a})$$

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}, \quad \sin(P) - \sin(Q) = 2 \sin\left(\frac{P-Q}{2}\right) \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right). \quad (\text{I.40b})$$

DÉMONSTRATION. En effet, on écrit (I.31a) et la même égalité appliquée à $-b$:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

et par différence

$$\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \sin a \sin b. \quad (\text{I.41})$$

On cherche P et Q tels que

$$a + b = P, \quad (\text{I.42a})$$

$$a - b = Q, \quad (\text{I.42b})$$

ce qui donne, par demi-somme et demi-différence :

$$a = \frac{P+Q}{2}, \quad (\text{I.43a})$$

$$b = \frac{P-Q}{2}. \quad (\text{I.43b})$$

Si on remplace (I.42) et (I.43) dans (I.41), il vient

$$\cos P - \cos Q = -2 \sin\left(\frac{P+Q}{2}\right) \sin\left(\frac{P-Q}{2}\right),$$

ce qui est (I.40a).

On écrit aussi (I.31b) et la même égalité appliquée à $-b$:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

et par différence

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b. \quad (\text{I.44})$$

Si on remplace (I.42) et (I.43) dans (I.44), il vient

$$\sin P - \sin Q = 2 \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right) \sin\left(\frac{P-Q}{2}\right),$$

ce qui est (I.40b).

□

◇

PROPOSITION I.21. *Pour tout x réel*

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad (\text{I.45a})$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x. \quad (\text{I.45b})$$

DÉMONSTRATION. Elles viennent de (I.31b) où $x = a = b$, ce qui donne immédiatement (I.45a) puis de (I.31a) où $x = a = b$, ce qui donne

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Si on utilise (I.3) en remplaçant θ par x , puis $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, on obtient

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Si on utilise (I.3) en remplaçant θ par x , puis $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on obtient

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

□

PROPOSITION I.22. *On a pour tous réels a et b appartenant à D (défini par (I.7)) tels que $a+b$ appartienne à D , on a*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \quad (\text{I.46})$$

DÉMONSTRATION. Sous les hypothèses faites, on peut écrire successivement, d'après (I.31)

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}, \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}, \end{aligned}$$

et comme $\cos a \neq 0$ et $\cos b \neq 0$, en divisant par $\cos a \cos b$:

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}, \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{aligned}$$

□

PROPOSITION I.23. *Pour tout x réel appartenant à D (défini par (I.7)) tel que $2x$ appartienne à D , on a*

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad (\text{I.47})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la proposition I.22 à $x = a = b$. □

I.3.2. Dérivées des fonctions trigonométriques

Reprenons la remarque I.5 fondée sur le fait que pour θ proche de zéro et exprimé en radian, on a

$$\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta, \quad (\text{I.48})$$

ce que nous allons montrer maintenant. Ainsi, *pour toute la suite, θ est exprimé en radians!*

PROPOSITION I.24. *On a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\text{I.49a})$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\text{I.49b})$$

$$\forall x \in D, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \quad (\text{I.49c})$$

On procède en plusieurs étapes.

(1) Commençons par montrer le résultat suivant :

LEMME I.25.

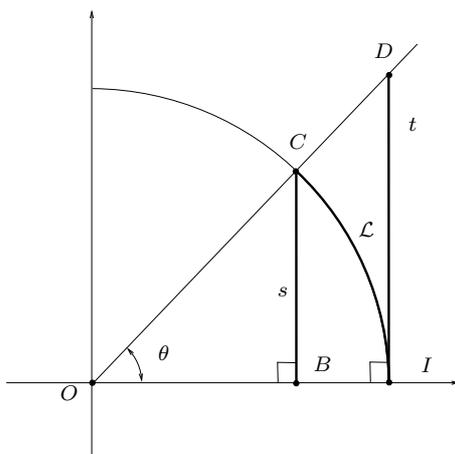


FIGURE I.18. La longueur de l'arc de cercle \mathcal{L} , s et t .

Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ et le cercle de centre O et de rayon r (voir figure I.18.) On considère C le point du cercle définissant l'angle θ , B son projeté orthogonal sur l'axe des x , I le point de l'axe des x d'abscisse 1 et D le point de la droite (OC) d'abscisse 1. On note $s = BC$, \mathcal{L} , la longueur de l'arc engendré par l'arc de cercle de centre O et défini par l'angle θ et $t = IB$. On a alors

$$s < \mathcal{L} < t, \quad (\text{I.50})$$

et

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta. \quad (\text{I.51})$$

DÉMONSTRATION. Dans le (vrai) triangle rectangle CBI , l'hypoténuse CI est strictement plus grande que le côté BC . La longueur \mathcal{L} est strictement plus grande que la corde CI et on a donc

$$s < \mathcal{L}. \quad (\text{I.52})$$

L'angle θ étant dans $]0, \pi/2[$, le segment le segment $[ID]$ est à l'extérieur du cercle. On en déduit que l'aire de la portion de disque délimitée par θ est strictement plus petite que l'aire du triangle ODI . Ces aires sont respectivement égales à $\theta r^2/2$ et $rt/2$. Puisque

$$\mathcal{L} = r\theta,$$

ces aires valent donc respectivement $\mathcal{L}r/2$ et $tr/2$ et on a donc

$$\frac{\mathcal{L}r}{2} < \frac{tr}{2},$$

et donc

$$\mathcal{L} < t. \quad (\text{I.53})$$

L'inégalité (I.50) provient donc (I.52) et de (I.53). En remplaçant dans (I.50) respectivement s , \mathcal{L} et t par $r \sin \theta$, $r\theta$ et $r \tan \theta$, on déduit (I.51).

REMARQUE I.26. Une preuve "moderne" pour démontrer analytiquement directement (I.51) (et donc en déduire (I.50) qui est équivalente) consiste à utiliser la convexité et la concavité des fonctions tan et sin. En effet, on a

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Donc la dérivée de tan est strictement croissante (car cos est décroissante) et donc tan est strictement convexe sur $[0, \pi/2[$. On a aussi

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sin''(x) = -\cos(x) < 0,$$

Donc sin est strictement concave sur $[0, \pi/2[$. Ainsi, le graphe de la fonction tan est toujours strictement au-dessus de sa tangente en zéro sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, tandis que le graphe de la fonction sin est toujours strictement en-dessous de sa tangente en zéro sur l'intervalle $[0, \pi/2[$. Les deux tangentes des deux fonctions tan et sin en zéro sont la droite d'équation $y = x$. On a donc

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan(x) > x > \sin(x).$$

Mais ce raisonnement nous pousse à tourner à rond³ car cette preuve est fondée sur la dérivée du sinus, elle-même fondée sur l'inégalité que nous sommes en train de montrer!

□

(2) Montrons maintenant (ce qui justifie en fait (I.48))

LEMME I.27. *On a*

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta &= 0, \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta &= 1, \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} &= 1, \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.

Ainsi, on déduit tout d'abord de la première inégalité de (I.51) que, par encadrement,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0, \tag{I.54}$$

et donc (car la somme des carrés vaut 1)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1. \tag{I.55}$$

On a aussi d'après la première inégalité de (I.51)

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\sin \theta}{\theta} < 1. \tag{I.56}$$

On a aussi

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\tan \theta}{\theta} \frac{1}{\cos \theta},$$

et donc, d'après la seconde inégalité de (I.51),

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\sin \theta}{\theta} > \frac{1}{\cos \theta}. \tag{I.57}$$

D'après (I.55), (I.56) et (I.57), on a donc par encadrement

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1. \tag{I.58}$$

On fait de même pour la seconde inégalité à montrer. D'après la seconde inégalité de (I.51), on a

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\tan \theta}{\theta} > 1 \tag{I.59}$$

On a aussi

$$\frac{\tan \theta}{\theta} = \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{1}{\cos \theta},$$

et donc, d'après la première inégalité de (I.51),

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{\tan \theta}{\theta} < \frac{1}{\cos \theta}. \tag{I.60}$$

3. dans le sens trigonométrique ...

D'après (I.55), (I.59) et (I.60), on a donc par encadrement

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1.$$

□

(3) Montrons maintenant le résultat suivant :

LEMME I.28. *On a*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha + h) - \sin \alpha}{h} = \cos \alpha,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha + h) - \cos \alpha}{h} = -\sin \alpha.$$

DÉMONSTRATION.

(a) Soient α et h deux réels. On applique (I.40a) à $P = \alpha + h$ et $Q = \alpha$:

$$\cos(\alpha + h) - \cos \alpha = -2 \sin \left(\alpha + \frac{h}{2} \right) \sin \left(\frac{h}{2} \right)$$

et donc, pour h non nul :

$$\frac{\cos(\alpha + h) - \cos \alpha}{h} = -2 \sin \left(\alpha + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{h},$$

$$= -\sin \left(\alpha + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}},$$

et donc, en utilisant de nouveau (I.31b) :

$$\frac{\cos(\alpha + h) - \cos \alpha}{h} = -\frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \left(\sin \alpha \cos \left(\frac{h}{2} \right) + \sin \left(\frac{h}{2} \right) \cos \alpha \right),$$

et (I.54), (I.55) et (I.58), cela implique à la limite $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha + h) - \cos \alpha}{h} = -\sin \alpha.$$

(b) Soient α et h deux réels. On applique (I.40b) à $P = \alpha + h$ et $Q = \alpha$:

$$\sin(\alpha + h) - \sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{h}{2} \right) \cos \left(\alpha + \frac{h}{2} \right)$$

et donc, pour h non nul :

$$\frac{\sin(\alpha + h) - \sin \alpha}{h} = 2 \cos \left(\alpha + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{h},$$

$$= \cos \left(\alpha + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}},$$

et donc, en utilisant (I.31a) :

$$\frac{\sin(\alpha + h) - \sin \alpha}{h} = \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \left(\cos \alpha \cos \left(\frac{h}{2} \right) - \sin \left(\frac{h}{2} \right) \sin \alpha \right),$$

et d'après (I.54), (I.55) et (I.58), cela implique à la limite $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha + h) - \sin \alpha}{h} = \cos \alpha.$$

□

(4) Les égalités (I.49a) et (I.49b) proviennent donc du résultat du lemme I.28, par définition de la dérivée.

Montrons enfin (I.49c). On écrit successivement

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)', \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x}, \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant (I.8m).

◇

I.3.3. Autres formules

En cours de rédaction.

PROPOSITION I.29 (Utilisation de l'arc moitié). *Si t est un réel appartenant à D (défini par (I.7)), alors en posant*

$$u = \tan \left(\frac{t}{2} \right).$$

on a

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \tag{I.61}$$

$$\sin t = \frac{2u}{1 + u^2}. \tag{I.62}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser (I.45a) qui donne successivement

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin \left(2 \frac{t}{2} \right), \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right), \\ &= \frac{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)}, \\ &= \frac{2 \frac{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}{\cos \left(\frac{t}{2} \right)}}{\frac{\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)} + 1}, \\ &= \frac{2u}{u^2 + 1}. \end{aligned}$$

De même, (I.45b) donne successivement

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos\left(2\frac{t}{2}\right), \\ &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right), \\ &= \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}, \\ &= \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} + 1}, \\ &= \frac{1 - u}{u^2 + 1}.\end{aligned}$$

□

PROPOSITION I.30 (Linéarisation). *On a tout x réel*

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)), \quad (\text{I.63a})$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)). \quad (\text{I.63b})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser (I.45b) à l'envers. Par exemple la troisième égalité donne :

$$1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$$

dont on déduit (I.63b). La preuve de (I.63a) repose sur la deuxième égalité de (I.45b)

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$$

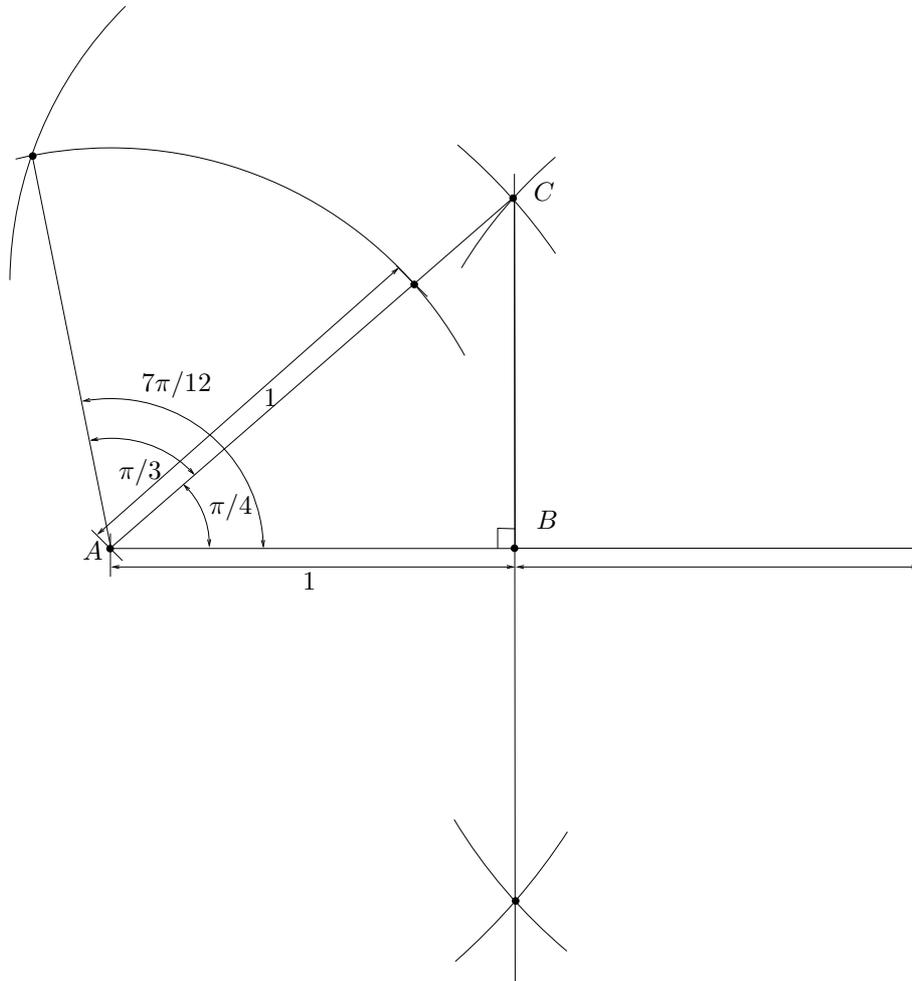
□

I.4. Les angles sont, en fait, inutiles !

J'ai une pensée émue pour toutes ces générations de collégiens (dont j'ai fait forcément partie !) à qui on a demandé de tracer des centaines d'angles ou de faire autant de mesures avec un rapporteur ! Les angles sont en fait tout à fait inutiles.

Les exemples de l'exercice I.14 et de son corrigé page 103 nous montre que l'on peut tracer un angle de $\pi/3$ et de $\pi/4$. On peut les additionner à la règle et au compas (pour retrouver l'angle $\pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$) sans évoquer la valeur de la somme de l'angle comme le montre la figure I.19, elle-même fondée sur les deux constructions géométriques des deux angles précédents.

Si on reprend la définition du sinus et du cosinus ou les deux cas traités 1 page 97 et 2 page 98, il suffit en fait de donner le cosinus ou le sinus d'un angle, pour pouvoir le tracer de façon géométrique, sans en connaître sa mesure. Plus précisément, si l'angle appartient à $[0, \pi/2]$, il suffit d'en donner le sinus ou le cosinus. Si l'angle appartient à $[0, \pi]$, il suffit d'en fournir le cosinus, puisque pour tout $c \in [-1, 1]$, il existe un unique angle $\theta \in [0, \pi]$, tel que $\cos \theta = c$. Si l'angle appartient à $[0, \pi]$, il suffit d'en fournir le sinus et de préciser si l'angle est dans $[0, \pi/2]$ ou $[\pi/2, \pi]$ puisque pour tout $s \in [0, 1]$, il existe deux angles θ_0 et $\theta_1 = \pi - \theta_0$ tels que $\sin \theta_0 = \sin \theta_1 = s$. L'un des angles appartient à $[0, \pi/2]$ et l'autre à $[\pi/2, \pi]$. Si l'angle est dans $[-\pi, 0]$, on peut se ramener au cas où l'angle appartient à $[0, \pi]$, en le traçant dans l'autre sens. Toutes ces constructions peuvent se faire à la règle et au compas. De plus, si on connaît le sinus ou le cosinus d'un angle, on peut déterminer la ligne qui manque en utilisant (I.3), si on connaît l'intervalle $[0, \pi/2]$ ou $[\pi/2, \pi]$ auquel appartient à cet angle. Ainsi, connaissant le sinus et le cosinus d'un angle a et le sinus et le cosinus d'un angle

FIGURE I.19. Tracé géométrique de l'angle $\pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$.

b , on peut, grâce à (I.31), déterminer le sinus et le cosinus de la somme $a + b$, tracer cet angle, sans donc en connaître sa mesure. Notons aussi que l'on peut se contenter de la tangente d'un angle, en utilisant (I.8m) pour en retrouver le cosinus et donc le sinus.

On peut aussi, pour des angles appartenant à $[0, \pi/2]$, remplacer la donnée de la mesure de l'angle, par la donnée de deux des trois longueurs correspondant aux mesures d'un triangle rectangle dont l'un des angles non droit correspond à cet angle, comme dans le cas de la proposition I.2. On d'une part, tracer, à la règle et au compas, le triangle rectangle donné, et donc obtenir l'angle, sans en connaître sa mesure, d'autre part, grâce au théorème de Pythagore, déterminer la mesure du côté non connu du triangle rectangle. Grâce, de nouveau, à la proposition I.2, il est possible d'en déduire le sinus, le cosinus ou la tangente de l'angle et utiliser le paragraphe précédent pour déterminer les lignes trigonométriques de sommes d'angles. Si l'angle appartient à $[0, \pi]$, on peut aussi considérer des longueurs algébrisées, c'est-à-dire, avec un signe, afin de prendre en compte l'aspect obtus d'un angle.

Les mésopotamiens, très en avance sur les Romains par exemples⁴ ne notaient pas les angles mais utilisaient déjà des tables trigonométriques et raisonnaient sur des triangles et leurs longueurs. On pourra consulter https://fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques_mésopotamiennes. Je me demande maintenant maintenant si les petits scribes mésopotamiens ont tracé des centaines⁵ de triangles rectangles !

I.5. Propriétés des fonctions trigonométriques

Outre les propriétés de la proposition I.1, on a les propriétés suivantes des fonctions trigonométriques.

En cours de rédaction.

I.6. Les fonctions trigonométriques réciproques

En cours de rédaction.

4. Les mésopotamiens utilisaient un système de numérotation pour l'écriture et le calcul, mais en base 60, dans lequel le zéro (noté par la suite pour la première fois sous sa forme actuelle en Inde, puis transmis aux Arabes) existait déjà, symbolisé par un espace.

5. plutôt des soixantaines !

L'argument d'un nombre complexe et la fonction atan_2

J.1. L'argument d'un nombre complexe

Montrons que l'on a les quatre formules (J.2) (qui correspondent aux quatre cas de la figure J.2 page 121) : Si $z = x + iy$ appartient à \mathbb{C} et que l'on considère θ son argument¹, ou, ce qui revient au même, si on considère les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point du point et ses coordonnées polaires (r, θ) liées² par

$$x = r \cos \theta, \quad (\text{J.1a})$$

$$y = r \sin \theta, \quad (\text{J.1b})$$

alors

$$\text{Si } x, y > 0 \text{ (cas 1), } \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]0, \pi/2[, \quad (\text{J.2a})$$

$$\text{Si } x < 0 \text{ et } y > 0 \text{ (cas 2), } \theta = \pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]\pi/2, \pi[, \quad (\text{J.2b})$$

$$\text{Si } x, y < 0 \text{ (cas 3), } \theta = -\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]-\pi/2, -\pi[, \quad (\text{J.2c})$$

$$\text{Si } x > 0 \text{ et } y < 0 \text{ (cas 4), } \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in]-\pi/2, 0[. \quad (\text{J.2d})$$

Attention à ne pas écrire que pour tout (x, y) ,

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

ce qui n'est pas toujours vrai puisque θ appartient à $] - \pi, \pi]$ alors que $\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ appartient à $] - \pi/2, \pi/2[$.

- Le cas 1 est immédiat.
- Dans le cas 2 (voir figure 2(b)), on a

$$\phi + \theta = \pi, \quad (\text{J.3})$$

où $\phi \in]0, \pi/2[$ et $\theta \in]\pi/2, \pi[$. Dans le triangle rectangle de la figure J.1, on a, de façon géométrique

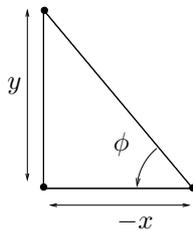


FIGURE J.1. Le triangle rectangle.

$$\tan(\phi) = \frac{|y|}{|x|},$$

1. En faisant l'hypothèse habituelle qu'il appartient à l'intervalle $] - \pi, \pi]$.
 2. En faisant l'hypothèse habituelle que θ appartient à l'intervalle $] - \pi, \pi]$.

et donc puisque $y > 0$ et $x < 0$:

$$\tan(\phi) = -\frac{y}{x},$$

et donc

$$\phi = \frac{y}{-x} = \text{atan}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

et de (J.3), on déduit

$$\theta = \pi - \phi = \pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

dont on déduit (J.2b).

- Dans le cas 3 (voir figure 2(c)), on a

$$\phi + \theta = -\pi, \tag{J.4}$$

où $\phi \in]-\pi/2, 0[$ et $\theta \in]-\pi, -\pi/2[$. Comme précédemment, on a

$$\tan(\phi) = -\frac{-y}{-x} = -\frac{y}{x},$$

et donc

$$\phi = -\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

et donc, d'après (J.4),

$$\theta = -\pi - \phi = -\pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

dont on déduit (J.2c).

- Dans le cas 4 (voir figure 2(d)), on est dans le même cas que le cas 1.

Si on fait la convention habituelle suivante :

$$\text{atan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{J.5}$$

les équations (J.2) sont encore valables si x ou y peuvent s'annuler, sans être simultanément nuls et deviennent : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\text{Si } x, y \geq 0 \text{ (cas 1), } \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, \pi/2[, \tag{J.6a}$$

$$\text{Si } x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ (cas 2), } \theta = \pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [\pi/2, \pi], \tag{J.6b}$$

$$\text{Si } x, y \leq 0 \text{ (cas 3), } \theta = -\pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [-\pi/2, -\pi[, \tag{J.6c}$$

$$\text{Si } x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \text{ (cas 4), } \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \in [-\pi/2, 0]. \tag{J.6d}$$

Vérifions par exemple (J.6a). Si $x > 0$ et $y = 0$, on a $\phi = 0$ et $\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{atan}(0) = 0$. Si $x = 0$ et $y > 0$, on a $\phi = \pi/2$ et $\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{atan}(+\infty) = \pi/2$.

J.2. La fonction atan_2

On définit alors la fonction bien connue des informaticiens atan_2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- Si $y \neq 0$, on pose

$$\phi = \text{atan}\left|\frac{y}{x}\right|, \tag{J.7}$$

puis

$$\text{atan}_2(y, x) = \begin{cases} \phi \text{ signe}(y) & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} \text{ signe}(y) & \text{si } x = 0, \\ (\pi - \phi) \text{ signe}(y) & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{J.8}$$

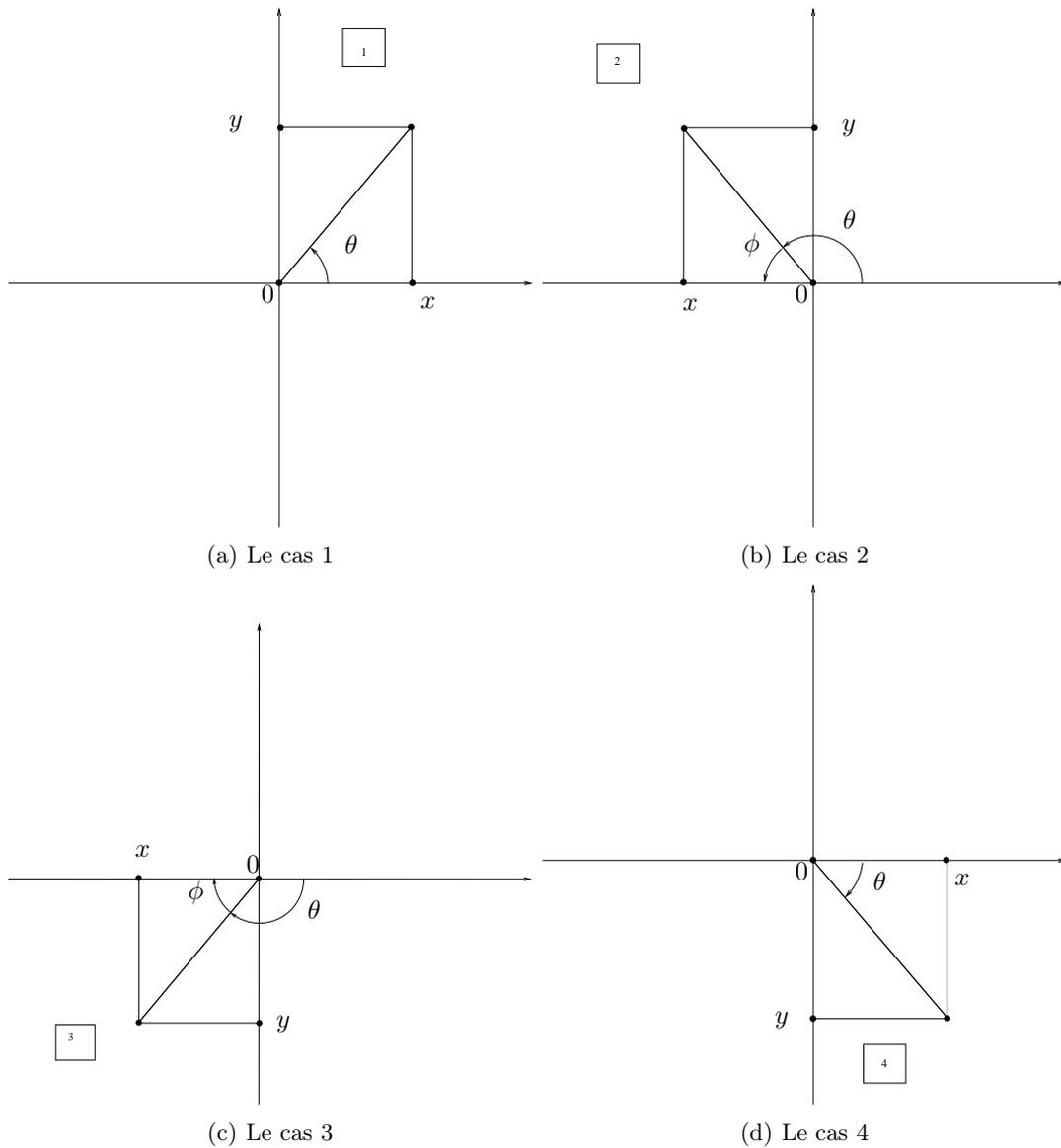


FIGURE J.2. Les quatre cas possibles.

- Si $y = 0$,

$$\text{atan}_2(y, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ \text{non défini} & \text{si } x = 0, \\ \pi & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (\text{J.9})$$

- On peut aussi rajouter, pour être cohérent avec les conventions de Matlab :

$$\text{atan}_2(0, 0) = 0. \quad (\text{J.10})$$

On pourra consulter <https://fr.wikipedia.org/wiki/Atan2>.
 Cette définition correspond à la définition de la fonction `atan2` de Matlab.

Avec ce qui précède, il est aisé de constater que l'argument θ d'un nombre complexe $z = x + iy$ est donné par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \quad \theta = \text{atan}_2(y, x), \quad (\text{J.11})$$

voire même parfois (ce qui est le choix de Matlab)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta = \text{atan}_2(y, x). \quad (\text{J.12})$$

(1) En effet, supposons que x et y sont tous les deux non nuls. Étudions chacun des quatre cas de la section J.1.

- Le cas 1 est immédiat.
- Dans le cas 2, on a d'après (J.2b),

$$\begin{aligned} \theta &= \pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi - \text{atan}\left(\frac{y}{-x}\right), \\ &= \pi - \text{atan}\left|\frac{y}{-x}\right|, \\ &= \pi - \text{atan}\left|\frac{y}{x}\right|, \\ &= \left(\pi - \text{atan}\left|\frac{y}{x}\right|\right) \text{signe}(y), \\ &= (\pi - \phi) \text{signe}(y). \end{aligned}$$

- Dans le cas 3, on a d'après (J.2c),

$$\begin{aligned} \theta &= -\pi + \text{atan}\left(\frac{-y}{-x}\right), \\ &= -\pi + \text{atan}\left|\frac{y}{x}\right|, \\ &= \left(\pi - \text{atan}\left|\frac{y}{x}\right|\right) \text{signe}(y), \\ &= (\pi - \phi) \text{signe}(y). \end{aligned}$$

- Dans le cas 4, on conclut de la même façon.

(2) Si x et y peuvent s'annuler, sans l'être simultanément, on utilise alors la convention (J.5) et le calcul est immédiat.

(3) Si x et y sont tous les deux nuls, on peut adopter la convention (J.10).

J.3. Exemples

Donnons huit calculs différents.

- Pour $z = 1$, on a $x = 1$ et $y = 0$ et, d'après (J.6a),

$$\theta = \text{atan}(0) = 0;$$

- Pour $z = 1 + i$, on a $x = 1$ et $y = 1$ et, d'après (J.6b),

$$\theta = \text{atan}(1) = \frac{\pi}{4};$$

- Pour $z = i$, on a $x = 0$ et $y = 1$ et, d'après (J.6b),

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2};$$

- Pour $z = -1 + i$, on a $x = -1$ et $y = 1$ et, d'après (J.6b),

$$\theta = \pi + \text{atan}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

- Pour $z = -1$, on a $x = -1$ et $y = 0$ et, d'après (J.6b),

$$\theta = \pi + \operatorname{atan}(0) = \pi;$$

- Pour $z = -1 - i$, on a $x = -1$ et $y = -1$ et, d'après (J.6c),

$$\theta = -\pi - \operatorname{atan}(-1) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4};$$

- Pour $z = -i$, on a $x = 0$ et $y = -1$ et, d'après (J.6d),

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{-1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2};$$

- Pour $z = -i + 1$, on a $x = 1$ et $y = -1$ et, d'après (J.6d),

$$\theta = \operatorname{atan}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Bibliographie

- [Bas11a] J. BASTIEN. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie*. Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT25. 2011. 180 pages.
- [Bas11b] J. BASTIEN. *Mathématiques : Applications*. Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31. 2011. 158 pages.
- [Bas17] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Corrigés de TD de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2017. 59 pages.
- [Bas18a] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2018. 93 pages.
- [Bas18b] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2018. 190 pages.
- [Bas22a] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022. 270 pages.
- [Bas22b] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022. 39 pages.
- [Bas22c] J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base*. Travaux Dirigés de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022. 25 pages.
- [Bas22d] J. BASTIEN. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3*. Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022. 269 pages.
- [Bas24a] J. BASTIEN. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios*. Transparents de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2024. 106 pages.
- [Bas24b] J. BASTIEN. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios*. Travaux Dirigés de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2024. 7 pages.
- [Bas24c] J. BASTIEN. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios*. Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2024. 6 pages.
- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4^e étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.
- [BMW11] P. BIGOT, R. MAUDUIT et É. WENNER. *Mécanique des fluides en 20 fiches. Comprendre et s'entraîner facilement*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 532 BIG, 4^e étage). Dunod, 2011.
- [Car84] J.-C. CARREGA. *Théorie des corps. La règle et le compas*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.3 CAR, 4^e étage). Paris : Hermann, 1984.
- [Cau08] F. CAUNEAU. *Mécanique des fluides*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 532 CAU, 4^e étage). Mines ParisTech - Les Presses, 2008.
- [CN03] T. CLOPEAU et D. NAIMA. *Pré-requis mathématiques. Notes de cours*. Polytech Lyon, 2003.
- [DB21] N. DÉBIT et J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base*. Notes de cours de l'UV MNB (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2021. 288 pages.
- [DB22] N. DÉBIT et J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base*. Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022. 326 pages.
- [GS85] H. GIÉ et J.-P. SARMANT. *Mécanique, volume 2*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 GIE, 4^e étage). Paris : Technique et documentation (Lavoisier), 1985.
- [Mac19] D. MACHON. *Mathématiques pour l'ingénieur. Recueil d'exercices*. Polytech Lyon, 2019.

- [RDO88] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse*. 2^e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4^e étage). Masson, Paris, 1988, pages VIII+362.
- [RDO93] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 1*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4^e étage). Masson, Paris, 1993, pages viii+440.
- [Vél03] J. VÉLU. *Mathématiques générales : cours et exercices corrigés*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 VEL, 4^e étage). Paris : Dunod, 2003.