Matériaux 3A MFImater Automne 2021

Examen du 23 Septembre 2021

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
TOUT ! Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

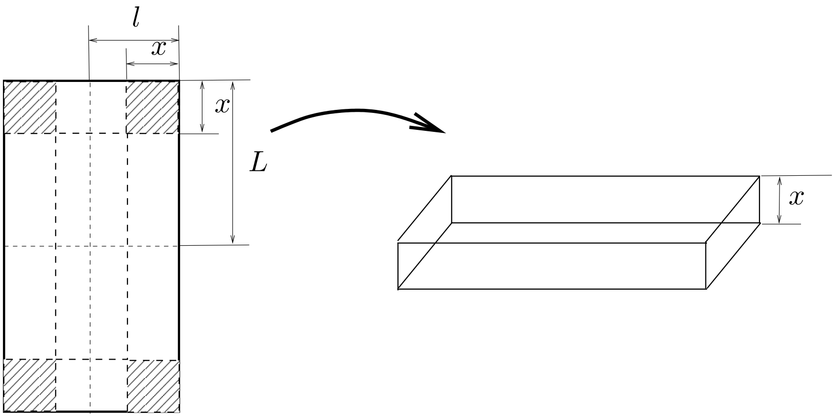

FIGURE 1. La boite et son patron.

On construit une boite en carton parallélépipédique (sans couvercle) à partir d'une surface rectangulaire de largeur $2l$ et de longueur $2L$, comme le montre la figure 1
On suppose donc que $0 < l \leq L$.
On admettra que $l^2 + L^2 - lL > 0$ et en posant

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(L + l - \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right),$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\left(L + l + \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right),$$

on admettra que

$$0 < x_1 < l \leq x_2.$$

Déterminer le coté x des quatre petits morceaux découpés pour que le volume de la boite construite soit maximal.

Exercice 2.
Déterminer le développement limité en $x = \pi/4$, à l'ordre 4 de $f(x) = \sin(x)$.
On pourra utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

- On utilise les formules habituelles et l'on dérive la fonction f autant de fois que nécessaire ;
- On pose $x = \pi/4 + h$ où h tend vers zéro et on utilise la formule

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Exercice 3.
On cherche à calculer dans cet exercice, l'intégrale I définie par

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

(1) En faisant le changement de variable $x = \tan(t)$, montrer que

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}.$$

(2) En faisant maintenant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que

$$I = -2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^2 - 1}.$$

(3) Enfin, en montrant que

$$\frac{1}{u^2 - 1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right),$$

conclure quant à la valeur de I.

Exercice 4.
Résoudre le système matriciel $AX = b$ dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.
Dans cet exercice, nous étudions le mouvement d'un sportif qui plonge en s'élançant d'un plongeoir, comme représenté sur la figure 2.

(1) Dans cette question, nous étudions tout d'abord la phase où le sportif s'élance sur la tremplin, partie horizontale du plongeoir (notée « Phase d'accélération horizontale » sur la figure 2).

(a) En supposant que son centre de gravité a un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération constante a_0 et que sa vitesse initiale est nulle, montrer que l'on a les lois

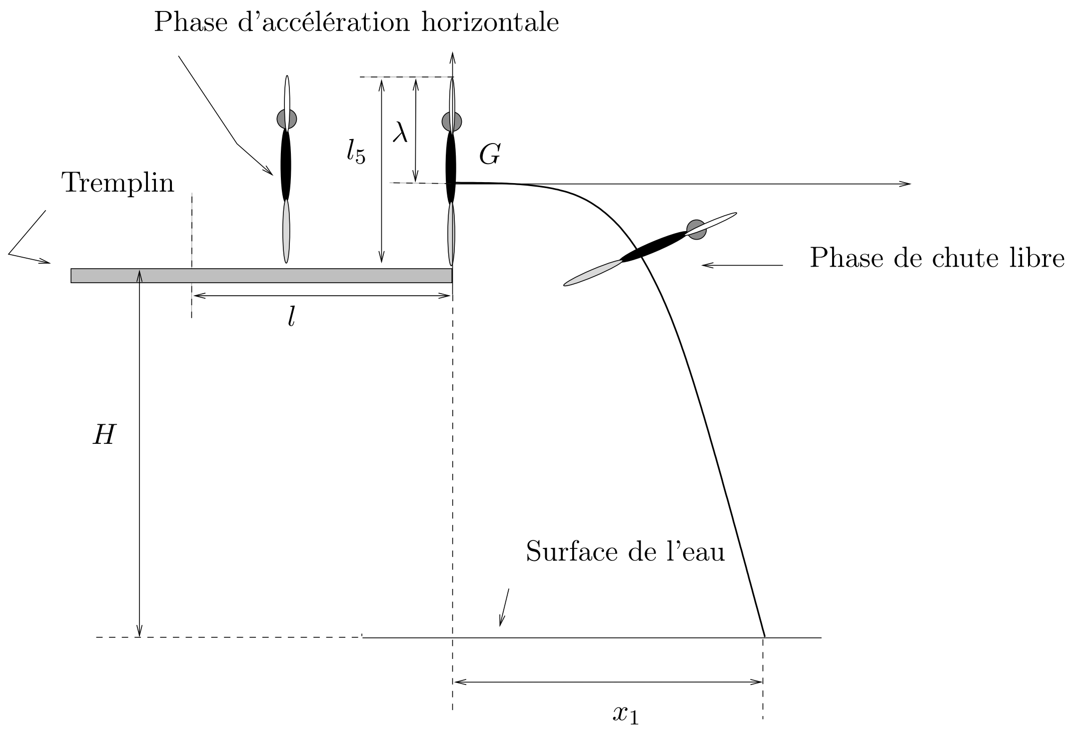

FIGURE 2. La situation générale du sportif qui exécute un plongeon.

horaires suivantes :

$$a(t) = a_0, \tag{1a}$$

$$v(t) = a_0 t, \tag{1b}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \tag{1c}$$

(b) En déduire que s'il parcourt une distance l (voir figure 2) alors l'instant où il atteint la fin de la partie horizontale du plongeoir est donné par

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_0}}, \tag{2a}$$

et la norme de la vitesse finale est égale à

$$v_0 = \sqrt{2la_0}. \tag{2b}$$

(c) Pour les valeurs numériques suivantes,

$$l = 5.00, \quad a_0 = 0.1958. \tag{3}$$

on donne la valeur de v_0 :

$$v_0 = 1.3994. \tag{4}$$

Caractériser le vecteur vitesse à cet instant.

(2) On étudie maintenant la phase de chute libre qui s'étend du moment où il quitte le plongeoir jusqu'à celui où il touche l'eau (notée « Phase de chute libre » sur la figure 2).

(a) En utilisant les résultats de la question 1c, montrer qu'au début de la chute libre, la vitesse $\vec{v}_0$ du centre de gravité du gymnaste fait un angle $\alpha = 0$ avec l'horizontale et que sa norme est donnée par (4).

(b) Établir alors les équations horaires de la trajectoire du centre de gravité du gymnaste lors de la chute libre. L'origine du repère est placé au centre de gravité au début de la chute libre comme l'indique la figure 2. On montrera en particulier que l'on a

$$x(t) = v_0 t, \tag{5a}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2. \tag{5b}$$

(c) On appelle H la hauteur entre la partie supérieure du tremplin et la surface de l'eau (voir figure 2). On admet que la distance verticale entre le centre de gravité du sportif au début de la chute de la chute libre et la surface de l'eau est donnée par $\mu = 11.0463$.

En déduire que le centre de gravité du sportif touche l'eau à l'instant t_1 donné par

$$t_1 = \sqrt{2\frac{\mu}{g}} = 1.501. \tag{6}$$

(d) Quelle est la distance horizontale entre le centre de gravité du sportif au début de la chute de la chute libre et son point d'impact à la surface de l'eau ?

(3) Caractériser la vitesse du gymnaste à l'instant t_1.

(4) (a) Pendant la chute libre, la posture du corps du gymnaste reste tendu et rigide, les bras au dessus de la tête. On note ω sa vitesse angulaire dont on admet qu'elle est constante.

Déterminer alors ω_0 pour que le corps du gymnaste ait tourné entre le début du mouvement et l'instant t_1 d'un angle égal à

$$\gamma = (90 - \beta) + 2 \times 360°, \tag{7}$$

où l'angle β, l'angle entre la vitesse de son centre de gravité et l'horizontale est donné par

$$\beta = -84.570°. \tag{8}$$

Vous montrerez que

$$\omega_0 = 1.656 \text{ tour s}^{-1}. \tag{9}$$

(b) Conclure en montrant qu'avec cette valeur, au moment de l'impact dans l'eau, le corps du gymnaste rentre dans l'eau avec un angle égal à celui que fait la vitesse de son centre de gravité avec l'horizontale. Quel en est l'intérêt ?