

Examen du 5 Octobre 2022

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI NON

Tout type

Exercice 1.

L'intensité de la pesanteur g varie avec l'altitude selon la loi

$$g(z) = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2},$$

avec R : rayon de la terre et z : altitude.

- (1) Quelle est l'expression de g pour les faibles altitudes ?
- (2) Jusqu'à quelle altitude peut-on utiliser cette relation pour que l'erreur *absolue* commise ne dépasse pas $\varepsilon = 10^{-3}$ ($R = 6400$ km) ?

On pourra faire un calcul exact ou approché en utilisant les calculs d'incertitudes.

Exercice 2.

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \ln(\cos(x))$.

Exercice 3.

Inventez une équation différentielle d'ordre un à coefficients constants, avec une condition initiale, qui ne soient pas celle inventée en cours (!) et résolvez-la complètement.

Exercice 4.

Résoudre le système matriciel $AX = b$ dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

- (1) (a) Soient
- b
- un réel non nul et
- c
- un réel quelconque. Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln |bx - c|,$$

et en déduire une primitive de

$$g(x) = \frac{1}{bx - c}.$$

Pour tout la suite, on suppose $b > 0$.

- (b) Calculer

$$\int_{(c+b)/b}^{(c+2b)/b} \frac{dx}{bx - c},$$

puis

$$\int_{(c-2b)/b}^{(c-b)/b} \frac{dx}{bx - c}.$$

- (2) (a) Calculer la dérivée de la fonction arcsin et en déduire :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (b) On souhaite calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

sur un intervalle où $x > 1$

- (i) On fait le changement de variable
- $\sqrt{x^2-1} = x + t$
- . Montrer que

$$x = -\frac{1+t^2}{2t}$$

puis que

$$dx = \frac{-t^2+1}{2t^2} dt$$

- (ii) En déduire
- $F(x)$
- d'abord en fonction de
- t
- puis en fonction de
- x
- . On montrera que

$$F(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right).$$

Attention dans ce changement de variable au sein d'une primitive, on procèdera comme dans celui d'une intégrale, sans les bornes.

- (c) Calculer successivement

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}.$$

CorrigéUn corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>