

<b>Examen du 29 Septembre 2023</b>
------------------------------------

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés :** OUI  NON

*Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits*

**Calculatrice autorisée :** OUI  NON

*Tout type*

**Exercice 1.**

- (1) (a) Quel est le développement limité de la fonction  $\sin$  au voisinage de 0 à l'ordre 3 ?  
(b) Quel est le développement limité de la fonction  $\arctan$  au voisinage de 0 à l'ordre 3 ?
- (2) En déduire le développement limité de  $\sin(\arctan(x))$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.

**Exercice 2.**

L'intensité de la pesanteur  $g$  varie avec l'altitude selon la loi

$$g(z) = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2},$$

avec  $R$  : rayon de la terre et  $z$  : altitude.

- (1) Quelle est l'expression de  $g$  pour les faibles altitudes ?
- (2) Jusqu'à quelle altitude peut-on utiliser cette relation pour que l'erreur *relative* commise ne dépasse pas  $\varepsilon = 10^{-3}$  ( $R = 6400$  km) ?

On pourra faire un calcul exact ou approché en utilisant les calculs d'incertitudes.

**Exercice 3.**

- (1) Soit  $t$  un réel strictement positif. Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_1^t \ln(x) dx.$$

On fera une intégration par parties.

- (2) Donner une primitive du logarithme.

**Exercice 4.**

Résoudre le système matriciel  $AX = b$  dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.**

Les deux questions sont indépendantes.

- (1) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3,$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

- (2) On cherche la solution de l'équation différentielle

$$-y'(t) + 2y(t) = \sin(1/2t),$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 1.$$

On utilise la méthode de la variation de constante. Pour cela, on procédera comme suit : on pourra faire une double intégration par partie

**Corrigé**

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>