

Examen du 29 Septembre 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI NON

Tout type

Exercice 1.

- (1) (a) Quel est le développement limité de la fonction \sin au voisinage de 0 à l'ordre 3 ?
(b) Quel est le développement limité de la fonction \arctan au voisinage de 0 à l'ordre 3 ?
- (2) En déduire le développement limité de $\sin(\arctan(x))$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Exercice 2.

L'intensité de la pesanteur g varie avec l'altitude selon la loi

$$g(z) = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2},$$

avec R : rayon de la terre et z : altitude.

- (1) Quelle est l'expression de g pour les faibles altitudes ?
- (2) Jusqu'à quelle altitude peut-on utiliser cette relation pour que l'erreur *relative* commise ne dépasse pas $\varepsilon = 10^{-3}$ ($R = 6400$ km) ?

On pourra faire un calcul exact ou approché en utilisant les calculs d'incertitudes.

Exercice 3.

- (1) Soit t un réel strictement positif. Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_1^t \ln(x) dx.$$

On fera une intégration par parties.

- (2) Donner une primitive du logarithme.

Exercice 4.

Résoudre le système matriciel $AX = b$ dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Les deux questions sont indépendantes.

- (1) Déterminez la solution de l'équation différentielle solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3,$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

- (2) On cherche la solution de l'équation différentielle solution de l'équation différentielle

$$-y'(t) + 2y(t) = \sin(1/2t),$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 1.$$

On utilise la méthode de la variation de constante. Pour cela, on procédera comme suit : on pourra faire une double intégration par partie

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>