Matériaux 3A MFImater Automne 2024

Examen du 30 Septembre 2024

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans (sauf tablette en mode avion), Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
On considère un gaz parfait vérifiant
$$PV = nRT.$$
Déterminer l'incertitude relative $\Delta V/V$ en fonction des incertitudes relatives de n, T et P.

Exercice 2.
Dans cet exercice, on souhaite calculer l'intégrale suivante :
$$F(t) = \int_0^{1/2\,\pi} (2+\sin(t))^{-1}\, dt.$$

(1) En fait le changement de variable $u = \tan(t/2)$. En utilisant
$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2},$$
montrer que
$$I = \int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1}.$$

(2) Montrer la forme canonique du dénominateur :
$$u^2+u+1 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

(3) En faisant le second changement de variable
$$v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\left(u+\frac{1}{2}\right),$$
déterminer finalement la valeur de I.

Exercice 3.
On considère un champ de pesanteur d'intensité donnée par la loi

$$g(z) = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}, \tag{1}$$

avec R : rayon de la terre, z : altitude et g_0 : intensité pour $z = 0$.

(1) (a) Déterminer le travail $W(Z)$ qu'il faut dépenser pour monter une masse m de l'altitude nulle jusqu'à l'altitude Z.

(b) Que constate-t-on si Z est petit devant R ?

(2) (a) Montrer que le travail $W(+\infty)$ qu'il faut dépenser pour extraire cette masse à la gravitation de la terre vaut

$$\lim_{Z \to +\infty} W(Z). \tag{2}$$

(b) Calculer ce travail.

Exercice 4.
Cet exercice est apparamment long, mais les questions sont détaillées et en principe pas difficiles ! On pourra admettre une ou plusieurs questions et passer à la suite.

(1) (a) Soient $r, t_0 \in \mathbb{R}$ et $N_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle est la solution de l'équation différentielle

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = rN(t), \tag{3a}$$

$$N(t_0) = N_0\,? \tag{3b}$$

(b) Donner rapidement le comportement de l'application $N : t \mapsto N(t)$ définie sur $[t_0, +\infty[$ en fonction de r (limite en $+\infty$ et monotonie).

(c) (i) On définit le taux de croissance (algébrique) entre les instants t et $t+h$, par le rapport du taux d'accroissement de N entre les instants t et $t+h$ sur N défini donc par

$$\tau(t) = \frac{N(t+h) - N(t)}{hN(t)}. \tag{4}$$

Quelle est la limite de ce taux de croissance quand h tend vers zéro ? Cette limite est appelée le taux de croissance instantané.

(ii) Calculez cette limite en fonction de r et conclure sur l'équation différentielle (3a).

(2) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Dans cette question, on cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = N(t)(a - bN(t)), \tag{5}$$

avec l'habituelle condition initiale (3b).

(a) Que retrouve-t-on quand $b = 0$?

(b) Pour toute la suite, on suppose que $b > 0$ et on pose $K = a/b > 0$ et on réécrit (5) sous la forme

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = aN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \tag{6}$$

(i) Quelle est la solution constante (non nulle) de l'équation différentielle (6) avec la condition initiale (3b). ?

(ii) On admet que si la solution de (6) est non constante, alors, elle ne s'annule pas. Montrer que si l'on pose $v = 1/N$, alors v est solution de

$$\forall t \geq t_0, \quad v' + av = \frac{a}{K}. \tag{7}$$

(iii) Résoudre l'équation différentielle (7).

(iv) On suppose pour toute la suite que

$$N_0 \neq K. \tag{8}$$

En déduire que la solution de (6) et (3b) est donnée par

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{9}$$

(v) Pour toute la suite, on suppose que

$$0 < N_0 < K. \tag{10}$$

(A) Montrer que $N : t \mapsto N(t)$ est définie[1] sur $[t_0, +\infty[$.

(B) Donner rapidement le comportement de N application sur $[t_0, +\infty[$ (limite en $+\infty$ et monotonie).

(C) Comme dans la question (1c), déterminer le taux de croissance instantané.

Exercice 5.
Résoudre le système matriciel $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

1. On peut aussi l'étudier mathématiquement sur $\mathbb{R}$ tout entier.