Matériaux 3A MFImater Automne 2022

Corrigé de l'examen (dm) du 30 Janvier 2023

Correction de l'exercice 1.
On écrit, grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de cos en zéro à l'ordre 4 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right).$$

et donc

$$\cos x = 1 + u,$$

où

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right), \tag{1}$$

qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. On écrit, ensuite grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de $\ln(1+u)$ en zéro à l'ordre 4 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right) \tag{2}$$

Remplaçons u par son expression en fonction de x :

$$\ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^4. \tag{3}$$

On calcule le terme quadratique $-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2$ en ne conservant que l'unique terme d'ordre inférieur à 4 :

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2 = -\frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$$

Les autres termes (de puissance 3 et 4) ne contiennent que des termes d'ordre supérieurs à 5 et donc

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right),$$

et donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right), \tag{4}$$

qui ne contient bien que des termes pairs puisque la fonction étudiée est paire.

Remarque 1. En fait, un dl à l'ordre 2 du logarithme suffisait ! On remplace (2) par

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right).$$

On remarque aussi que, d'après (1), on a $o\left(u^2\right) = o\left(x^4\right)$ Ainsi, compte tenu de tout cela, (3) est remplacé par

$$\ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o\left(x^4\right),$$

et on conclut comme précédemment.

Vérifions enfin tout cela avec matlab. On obtient bien en tapant

```
syms x;
pretty(taylor(log(cos(x)),5));
```

$$\ln(\cos(x)) = -1/2\, x^2 - 1/12\, x^4 + o\left(x^4\right),$$

ce qui est bien conforme à (4).

Correction de l'exercice 2.

(1) Si les femmes gagnent 24 % que les hommes, cela signifie que le salaire moyen d'une femme vaut α fois celui d'un homme où

$$\alpha = 1 - \frac{24}{100} = 0.76.$$

Ainsi, le salaire d'un homme est égal à β fois celui d'un homme où

$$\beta = \frac{1}{\alpha},$$

ce qui correspond à un pourcentage égal à

$$p = 100\,(\beta - 1) = 100\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

soit numériquement

$$p = 31.58,$$

ce qui est différent de 24 %.

(2) De façon générale, d'après les calculs précédents, on a

$$p = 100\left(\frac{1}{1 - n/100} - 1\right), \tag{5}$$

où n est le pourcentage correspondant à la perte de salaire féminin et p la hausse de salaire masculin. On peut écrire le développement limité suivant au voisinage de zéro :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x),$$

et donc d'après (5) :

$$\begin{aligned} p &= 100\left(1 + \frac{n}{100} - 1 + o\left(\frac{n}{100}\right)\right), \\ &= n + o\left(\frac{n}{100}\right), \end{aligned}$$

et donc si n est "petit" devant 100, on a

$$p \approx n.$$

Par exemple, pour un pourcentage n égal à 1, on a d'après (5) :

$$p = 1.0101,$$

ce qui est bien proche de 1.

(3) On a rigoureusement l'égalité $p = n$ ssi

$$n = 100\left(\frac{1}{1 - n/100} - 1\right),$$

ce qui est équivalent à

$$N = \frac{1}{1-N} - 1, \tag{6}$$

où $N = n/100$. Enfin, (6) est équivalent à

$$1 + N = \frac{1}{1-N},$$

et donc à

$$(1-N)(1+N) = 1,$$

c'est-à-dire

$$N^2 = 0,$$

et donc

$$n = 0,$$

ce qui correspond à une société parfaitement égalitaire !

Correction de l'exercice 3.
Exercice 1237 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par legall 1998/09/01

$$\tan x = x + \frac{1}{3}7x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$$

Correction de l'exercice 4.
Exercice 1237 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par legall 1998/09/01

$$\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right)$$

Correction de l'exercice 5.
Exercice 5433 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par 2010/07/06
Quand x tend $+\infty$, $1/x$ tend vers 0 et on a

$$\begin{aligned} x\ln(x+1) - (x+1)\ln x &= x\left(\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) - (x+1)\ln x, \\ &= -\ln x + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right), \\ &= -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

et donc

$$f(x)\ln x = -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Correction de l'exercice 6.
Exercice 701 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par bodin 1998/09/01

(1) Selon que $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

(2) La dérivée de $\sin^2 x$ est $2\sin x\cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2\cos 2x$, $-4\sin 2x$, $-8\cos 2x, 16\sin 2x$,... Et selon que $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.

(3) $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ et on dérive...

Correction de l'exercice 7.
Exercice 6865 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par bodin 2012/04/13
En effectuant le changement de variable $u = \ln x$ on a $x = \exp u$ et $du = \frac{dx}{x}$ on écrit :

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

Cette primitive est définie sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ (la constante peut être différente pour chacun des intervalles).

Correction de l'exercice 8.

Exercice 6865 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par bodin 2012/04/13

Soit le changement de variable $u = \exp x$. Alors $x = \ln u$ et $du = \exp x\, dx$ ce qui s'écrit aussi $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1} du = \frac{1}{3} \ln|3u+1| + c = \frac{1}{3} \ln(3\exp x + 1) + c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9.

Exercice 6865 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par bodin 2012/04/13

Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$ c'est $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On va donc essayer de s'y ramener. Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x-x^2$ sous la forme $1-t^2$: $4x-x^2 = 4-(x-2)^2 = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\right)$. Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u = \frac{1}{2}x-1$ pour lequel $4x-x^2 = 4(1-u^2)$ et $dx = 2du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}} 2du = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right) + c$$

La fonction $\arcsin u$ est définie et dérivable pour $u \in]-1,1[$ alors cette primitive est définie sur $x \in]0,4[$.