Matériaux 3A MFImater Automne 2023

Corrigé de l'examen du 27 Septembre 2023

Correction de l'exercice 1.

(1) (a) L'annexe A du cours nous donne par exemple

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

(b) L'annexe A du cours nous donne par exemple

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

(2) On obtient, après calculs (c'est à dire substitution de x par le dl du arctan dans celui de sin et suppression des termes de degrés strictement supérieurs à 3) :

$$x - 1/2\, x^3 + o\left(x^3\right).$$

Correction de l'exercice 2.

On renvoie à la correction de l'exercice de TD 2.16, présentée ci-dessous.
Cette correction est proche de la correction de l'exercice 2.15 page 20.

(1) L'approximation la plus simple que l'on puisse faire est $g(z) \approx g(0)$, soit, compte tenu de

$$g(z) = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}, \tag{1}$$

on propose

$$g(z) \approx g_0. \tag{2}$$

(2) Compte tenu de (2), l'erreur relative est donnée par

$$\varepsilon(z) = \left|\frac{g(z) - g_0}{g_0}\right|. \tag{3}$$

On cherche à résoudre l'inéquation (en z)

$$\varepsilon(z) \leq \varepsilon, \tag{4}$$

où

$$\varepsilon = 10^{-3}. \tag{5}$$

Nous proposons deux méthodes pour résoudre l'inéquation (4) : soit en faisant le calcul exact, soit en utilisant les incertitudes (voir section 2.5 page 14 du cours).

(a) Résolvons l'inéquation (4).
L'équation (3) est équivalente à

$$\left|\frac{g(z) - g_0}{g(z)}\right| \leq \varepsilon,$$

soit

$$\left|1 - g_0 (g(z))^{-1}\right| \leq \varepsilon,$$

et donc, compte tenu de (1) :

$$\left|1-\frac{(R+z)^2}{R^2}\right| \leq \varepsilon,$$

et puisque $\frac{(R+z)^2}{R^2} > 1$, c'est encore équivalent à

$$\frac{(R+z)^2}{R^2} - 1 \leq \varepsilon,$$

et donc

$$(R+z)^2 - R^2 \leq \varepsilon R^2,$$

soit encore

$$z^2 + 2Rz \leq \varepsilon R^2,$$

Comme dans l'exercice 2.15 page 20 de TD, on pose donc

$$\forall z \in \mathbb{R}_+, \quad P(z) = z^2 + 2Rz - \varepsilon R^2. \tag{6}$$

Il nous faut résoudre l'inéquation

$$P(z) \leq 0. \tag{7}$$

On constate, puisque $-\varepsilon R^2 < 0$ que

$$P(0) = -\varepsilon R^2 < 0,$$
$$\lim_{z \to +\infty} P(z) = +\infty,$$

et donc, il existe une valeur z_1 tel que $P(z_1) = 0$ et, pour tout $z \in [0, z_1[$, $P(z) < 0$. Ainsi, l'inéquation (7) est équivalente finalement à

$$z \in [0, z_1]. \tag{8}$$

Le discriminant réduit (voir annexe D page 68 du cours) Δ' de P est donné par

$$\Delta' = R^2 + \varepsilon R^2 = R^2 (1 + \varepsilon) > 0.$$

Le pôlynôme a donc deux racines z_1 et z_2 réelles, dont le produit vaut (voir annexe D page 68 du cours) $-\varepsilon R^2 < 0$. Ainsi, elle sont de signes contraires et la plus grande, notée z_1 est strictement positive. Elle est donnée par

$$z_1 = -R + \sqrt{\Delta'},$$

et donc

$$z_1 = R(-1 + \sqrt{1+\varepsilon}) \tag{9}$$

Numériquement, on obtient, en prenant $g_0 = 9.810\,\mathrm{m\,s^{-2}}$,

$$z_1 = 3.19920\,\mathrm{km} = 3199.20040\,\mathrm{m}, \tag{10}$$

valeur plus grande que celle donnée par (2.42).

On peut confirmer cela en traçant $|(g(z) - g_0)/(g(z)|$ pour $z \in [0, z_1]$ sur la figure 1 page suivante sur laquelle on constate que l'on a bien l'inéquation (4) puisque, numériquement,

$$\max_{z \in [0, z_1]} \left|\frac{g(z) - g_0}{g(z)}\right| = 10.\,10^{-4}.$$

(b) Transformons maintenant l'inéquation (4) en une équation plus simple à résoudre, en utilisant les calculs d'incertitudes.

Comme dans l'exercice 2.15 page 20 de TD, on constate sur la figure 1 que la fonction semble "à peu près" affine. Les calculs d'incertitudes relatives de la section 2.5.3 page 17 du cours sont valables.

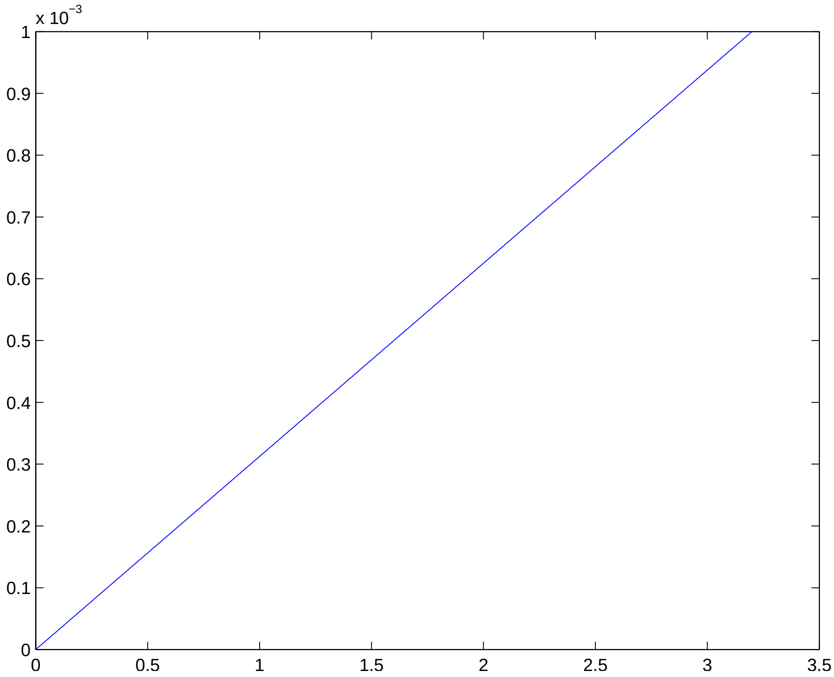

FIGURE 1. Le graphe $|(g(z)-g_0)/(g(z)|$ pour $z \in [0, z_1]$.

Avec les notations de la section 2.5.3 page 17 du cours, l'erreur relative est donnée par $\Delta g/g$ où g est donnée par (1). D'après l'exemple 2.28 page 17 du cours, on a en notant Δz, l'erreur absolue sur z, d'après (1)

$$\frac{\Delta g}{g} = \left.\frac{2\Delta(R+z)}{R+z}\right|_{z=0} = \left.\frac{2\Delta z}{R+z}\right|_{z=0} = \frac{2\Delta z}{R},$$

et donc l'équation (3) est équivalentes à

$$\frac{2\Delta z}{R} \leq \varepsilon.$$

et donc

$$\Delta z \leq \frac{\varepsilon R}{2}$$

soit encore $z \in [0, \widetilde{z}_1]$ où

$$\widetilde{z}_1 = \frac{\varepsilon R}{2}. \tag{11}$$

Numériquement, on obtient,

$$\widetilde{z}_1 = 3.20000\,\mathrm{km}, \tag{12}$$

très proche du résultat donné par (10).

Remarque 1. Cette bonne adéquation numérique provient du fait que ε est "petit". Raisonnons comme dans la remarque 2.3 page 24. Faisons un développement limité de z_1 donné par (9) à l'ordre un. D'après les formules habituelles de l'annexe A page 65 du cours, on a, pour u tendant vers zéro :

$$\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} + o(u),$$

et donc, pour $u = \varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$, (9) donne

$$z_1 = R\left(-1 + 1 + \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon)\right),$$

et donc

$$z_1 = \frac{\varepsilon R}{2} + o(\varepsilon), \tag{13}$$

et en négligeant le terme $o(\varepsilon)$, on a donc, pour ε "petit" :

$$z_1 = \frac{\varepsilon R}{2}. \tag{14}$$

L'équation (14) correspond à l'expression donnée par (11).

On conclut comme à la fin de la remarque 2.3 page 24.

Correction de l'exercice 3.

(1) Une intégration par parties (comme dans la correction de [Bas22, exercice de TD 3.2, question a) Travaux Dirigés 3] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/TDMFI.pdf` fournit

$$I = 1 + t\ln(t) - t.$$

(2) On en déduit qu'une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$.

Correction de l'exercice 4.

On obtient les résultats suivants :

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation redondante (et aucun couple d'équations contradictoires et aucune équation impossible) et le système admet un ensemble infini de solutions.

Correction de l'exercice 5.

(1) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_{\mathrm{g}}(t) = ce^{-3\,t}\,;$$

(c est une constante quelconque), une solution particulière {Plus précisément, on cherche un polynôme de degré 3 du type $at^3 + bt^2 + ct + 1$ et si on réinjecte ce polynôme dans l'équation différentielle, on obtient un système de 4 équations en a, b, c et d que l'on résoud.} :

$$y_{\mathrm{p}}(t) = \frac{4}{27} + 5/9\,t - 1/3\,t^2 + t^3\,;$$

la solution générale de l'équation différentielle donnée par $y = y_{\mathrm{g}} + y_{\mathrm{p}}$, soit ici :

$$y(t) = ce^{-3\,t} + \frac{4}{27} + 5/9\,t - 1/3\,t^2 + t^3\,;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de c, ce qui donne

$$y(t) = \frac{17}{27}\,e^3 e^{-3\,t} + \frac{4}{27} + 5/9\,t - 1/3\,t^2 + t^3.$$

(2) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_{\mathrm{g}}(t) = ce^{2\,t}\,;$$

(c est une constante quelconque), la solution générale de l'équation différentielle obtenue par la méthode de la variation de la constante {Plus précisément, cette double intégration par partie fournira une équation contenant la valeur de la primitive recherchée.} :

$$y(t) = ce^{2\,t} + 2/17\,\cos\left(1/2\,t\right) + \frac{8}{17}\,\sin\left(1/2\,t\right)\ ;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de c, ce qui donne

$$y(t) = \left(1 - 2/17\,\cos\left(1/2\right) - \frac{8}{17}\,\sin\left(1/2\right)\right)e^{-2}e^{2\,t} + 2/17\,\cos\left(1/2\,t\right) + \frac{8}{17}\,\sin\left(1/2\,t\right).$$

Références

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 39 pages.