Matériaux 3A MFImater — Automne 2024

Corrigé de l'examen du 30 Septembre 2024

Correction de l'exercice 1.
On obtient

$$\frac{\Delta V}{V} \leq \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta P}{P}.$$

On renvoie aux exemples 2.25 page 15 et 2.27 page 16 du cours.

Correction de l'exercice 2.
On trouve

$$I = 1/9\,\pi\,\sqrt{3}.$$

On renvoie à l'exemple G.4 page 84 du cours.

Remarque 1. Pour calculer cette intégrale beaucoup plus rapidement grâce au théorème des résidus, on pourra consulter [Bas22b, Proposition 5.1 page 47] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/coursOMI3.pdf`.

◊

Correction de l'exercice 3.
Rappelons tout d'abord la correction fraichement tapée de l'exercice de TD 3.2.
La masse volumique $\rho(r)$ dépend du rayon r. Il nous faut donc décomposer la spère en éléments infinitésimaux, de telle sorte qu'au sein de chacun d'eux la masse volumique soit constante.

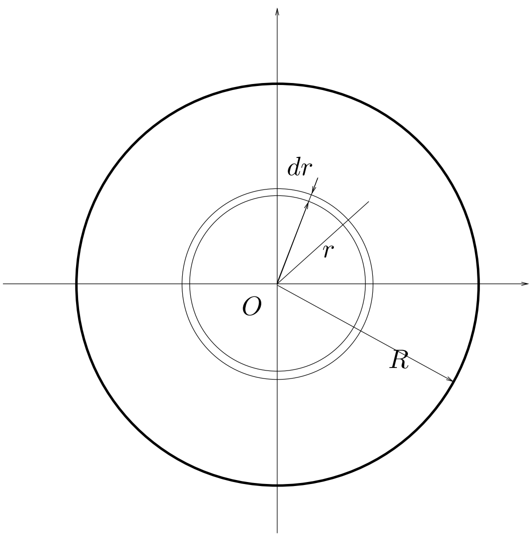

FIGURE 1. La sphère coupée avec une "couche" de sphère comprise entre les rayons r et $r+dr$ où $r \in [0, R[$.

Considérons donc la "couche" de sphère comprise entre les rayons r et $r + dr$ où $r \in [0, R[$. Voir la figure 1. La masse infitésimale dm de cette couche de sphère occupe un volume infinitésimal dV et par définition de la masse volumique (qui est constante dans cette couche de sphère), on a

$$\rho(r) = \frac{dm}{dV}$$

et donc

$$dm = \rho(r)dV. \tag{1}$$

Par ailleurs, le volume dV est égal (approximativement puisque dr est petit) à la surface de la sphère de rayon r, soit $4\pi r^2$ multiplié par son épaisseur, soit encore

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

et d'après (1), on a donc

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r)dr. \tag{2}$$

La masse totale M de la sphère vaut (en sommant toutes les masses infinitésimales dm) :

$$M = \int_{r=0}^{r=R} dm,$$

soit, d'après (2),

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r)dr. \tag{3}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer cela avec la fonction $\rho(r)$ fournie dans l'énoncé. On a donc successivement :

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^R \rho_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2}\right) r^2 dr, \\ &= 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 - \alpha \frac{r^4}{R^2} dr, \\ &= 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \alpha \frac{r^5}{5R^2}\right]_{r=0}^{r=R}, \end{aligned}$$

et on obtient donc

$$M = 4\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{5}\right). \tag{4}$$

Donnons maintenant la correction de cet exercice !

(1) (a) Il suffit de raisonner comme dans les corrections des exercices de TD 1.2 et 3.2 (tapée donc entre les pages 1 et 2). On écrit alors

$$W(Z) = \int dW,$$

et donc

$$W(Z) = \int_{z=0}^{z=Z} mg(z)dz, \tag{5}$$

et, d'après la loi fournie dans l'énoncé, il vient successivement

$$W(Z) = m \int_0^Z g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} dz,$$

soit encore

$$W(Z) = mg_0 R^2 \int_0^Z \frac{1}{(R+z)^2} dz, \tag{6}$$

ou encore

$$\begin{aligned} W(Z) &= mg_0R^2 \int_0^Z (R+z)^{-2} dz, \\ &= -mg_0R^2 \left[(R+z)^{-1}\right]_0^Z, \\ &= -mg_0R^2 \left(\frac{1}{R+Z} - \frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$W(Z) = mg_0R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+Z}\right) \tag{7}$$

On peut aussi écrire

$$W(Z) = \frac{mg_0R^2}{R(R+Z)} (R+Z-R)$$

et donc, après simplification :

$$W(Z) = \frac{mg_0RZ}{R(R+Z)}. \tag{8}$$

(b) On peut donc écrire d'après (7) successivement :

$$\begin{aligned} W(Z) &= \frac{mg_0R^2}{R}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{Z}{R}}\right), \\ &= mg_0R\left(1 - \left(1+\frac{Z}{R}\right)^{-1}\right), \end{aligned}$$

puisque $\frac{Z}{R}$ est petit devant 1, on utilise un développement limité à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} &= mg_0R\left(1 - \left(1 - \frac{Z}{R} + o\left(\frac{Z}{R}\right)\right)\right), \\ &= mg_0R\left(\frac{Z}{R} + o\left(\frac{Z}{R}\right)\right), \\ &= mg_0Z + o\left(\frac{Z}{R}\right), \end{aligned}$$

et donc, à l'ordre 1, on a

$$W(Z) \approx mg_0z, \tag{9}$$

ce qui est exactement le travail de la force gravitationnelle correspondant au champ constant d'intensité g_0 pour une hauteur Z, comme vu dans l'exercice de TD 1.2 .

(2) (a) Pour extraire cette masse à la gravitation de la terre, il faut aller jusqu'à[1] $Z = +\infty$ et donc le travail vaut

$$\lim_{Z\to+\infty} W(Z). \tag{10}$$

(b) D'après (7), on a donc

$$W(Z) = mg_0R^2\frac{1}{R}$$

soit

$$W(Z) = mg_0R, \tag{11}$$

soit le travail pour un champ constant d'intensité g_0 jusqu'à la hauteur R !

1. En pratique, on ira moins loin, car jusqu'à preuve du contraire, l'univers est fini ! En pratique on ira jusqu'à une distance Z à partir de laquelle, le poids est négligeable.

Remarque 2. On a donc l'existence de la quantité

$$W(+\infty) = mg_0R^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(R+z)^2} dz, \tag{12}$$

définie par

$$\lim_{Z\to+\infty} mg_0R^2 \int_0^{R} \frac{1}{(R+z)^2} dz, \tag{13}$$

qui fait intervenir une intégrale impropre (voir section E.4 du cours).

Correction de l'exercice 4.

(1) (a) D'après l'équation (4.4) du cours, on a

$$N(t) = Ce^{rt},$$

où C est une constante déterminée par la condition initiale (3b) de l'énoncé qui donne

$$N_0 = Ce^{rt_0},$$

puis

$$C = N_0 e^{-rt_0}$$

et

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N_0 e^{-rt_0} e^{rt},$$

et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N(t_0) e^{r(t-t_0)}. \tag{14}$$

(b) On a clairement les résultats suivants :

(i) Si $r < 0$, N est positive et décroissante et $\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$;

(ii) Si $r = 0$, N est constante (et égale à N_0) ;

(iii) Si $r > 0$, N est positive et croissante et $\lim_{t\to+\infty} N(t) = +\infty$;

(c) (i) D'après la définition (2.3) du cours de la dérivée, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t).$$

et donc

$$\lim_{h\to 0} \tau(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}. \tag{15}$$

(ii) D'après l'équation (3a) de l'énoncé, $\frac{N'(t)}{N(t)}$ vaut r et on a donc

$$\lim_{h\to 0} \tau(t) = r. \tag{16}$$

Remarque 3. Comme l'ont essayé certains d'entre vous, on pouvait aussi remarquer que, d'après (14) :

$$\begin{aligned}
\frac{N(t+h) - N(t)}{hN(t)} &= \frac{N(t_0)e^{r(t+h-t_0)} - N(t_0)e^{r(t-t_0)}}{hN(t_0)e^{r(t-t_0)}}, \\
&= \frac{\left(N(t_0)e^{r(t-t_0)}\right)\left(e^{rh} - 1\right)}{hN(t_0)e^{r(t-t_0)}}, \\
&= \frac{e^{rh} - 1}{h}.
\end{aligned}$$

Cela tend vers la dérivée de la fonction $h \mapsto e^{rh}$ en zéro qui vaut r. On peut aussi utiliser le développement limité de l'annexe A du cours et écrire, de façon strictement équivalente quand h tend vers zéro :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{rh} - 1}{h} &= \frac{1 + rh + o(h) - 1}{h}, \\
&= \frac{rh + o(h)}{h}, \\
&= r + o(1),
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{h \to 0} \tau(t) = r,$$

et on retrouve (16).

$\diamondsuit$

D'après (16), l'équation différentielle (3a) de l'énoncé traduit donc un modèle où le taux de croissance instantané défini par (15) est constant, situation déjà rencontrée dans [Bas22a, l'exercice de TD 6.12] (avec $r < 0$) ou [Bas22a, l'exercice de TD 11.7] (avec $r > 0$).

(2) (a) Si $b = 0$, l'équation différentielle (5) de l'énoncé est identique à l'équation différentielle (3) de l'énoncé. On renvoie donc à la correction de la question 1 dans ce cas-là.

(b) (i) Si on suppose que N est constante et vérifie la condition initiale (3b) de l'énoncé, on a $N = N_0$ et on a donc

$$0 = N'(t) = aN_0 \left(1 - \frac{N_0}{K}\right).$$

et donc, puisque N_0 est non nulle, on a $1 - \frac{N_0}{K} = 0$ et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = K. \tag{17}$$

(ii) Puisque N ne s'annulle pas, on peut poser $v' = 1/N$. On a alors $v' = -N'/N^2$ puis, en utilisant l'équation différentielle (6) de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{aN}{N^2}\left(1 - \frac{N}{K}\right), \\ &= -a\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{K}\right), \\ &= -av + \frac{a}{K}, \end{aligned}$$

et on obtient donc bien l'équation différentielle (7) de l'énoncé.

(iii) On résoud l'équation (7) de l'énoncé exactement comme dans l'exemple 4.6 page 30 du cours. La solution de l'équation homogène associée $v' + av = 0$ et donnée par $v(t) = Ce^{-at}$. La solution constante de l'équation différentielle (7) de l'énoncé est donnée par $av = \frac{a}{K}$, soit $v = 1/K$ et donc la somme de ces deux applications fournit la solution de l'équation différentielle (7) de l'énoncé :

$$v(t) = Ce^{-at} + \frac{1}{K},$$

(iv) Donc, en revenant à $N = 1/v$, on a

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-at} + \frac{1}{K}}. \tag{18}$$

La condition initiale (3b) de l'énoncé donne

$$N_0 = \frac{1}{Ce^{-at_0} + \frac{1}{K}}.$$

et donc, il vient

$$C = e^{at_0}\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right)$$

et en réinjectant dans (18), on a

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-at}e^{at_0}\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) + \frac{1}{K}},$$

ce qui est équivalent à l'équation (9) de l'énoncé.

(v)(A) Si on fait l'hypothèse (10) de l'énoncé, alors

$$\frac{K}{N_0} - 1 > 0, \tag{19}$$

et ainsi que le dénominateur de la fonction N est donc toujours strictement positif et N est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4. Contrairement au cadre du cours, où les solutions des équations différentielles sont définies sur $\mathbb{R}$, il faut le vérifier ici car ce n'est pas acquis, vu que l'on n'est pas dans le cadre de la section 4.2 du cours. Notons par exemple que si l'on ne fait pas l'hypothèse (10) de l'énoncé, la solution n'est pas nécessairement définie sur $\mathbb{R}$.

$\diamondsuit$

(B) Il n'est pas nécessaire de dériver N. D'après (19), la fonction $t \mapsto 1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}$ est décroissante et ainsi N est strictement croissante. De plus, il est aisé de constater que N tend vers K quand t tend vers l'infini.

(C) D'après (15) et l'équation (6) de l'énoncé, le taux de croissance r n'est plus constant comme dans la question 1, mais est donné par

$$r(N) = a\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

D'après ce qui précède, $r(t)$ est décroissant et passe de la valeur $aN\left(1 - \frac{N_0}{K}\right)$ à une limite égale à zéro.

Les deux équations différentielles (des questions 1 et 2) de cet exercice définissent respectivement les deux modèles (continus) de Malthus et de Verhulst, qui seront utilisés dans [Bas24a; Bas24b]. Dans ces références, d'autres propriétés sont données sur la fonction N étudiée dans la question 2.

Correction de l'exercice 5.

Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Références

[Bas22a] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 141 pages.

[Bas22b] J. Bastien. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3.* Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Mécanique 4A : Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3". 2022. 269 pages.

[Bas24a] J. Bastien. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios.* Transparents de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Tronc commun 3A : DDRS : croissance et scénarios". 2024. 106 pages.

[Bas24b] J. Bastien. *DDRS : Modèles de croissance démographique et scénarios.* Travaux Dirigés de l'UV DDRS (Tronc commun 3A) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Tronc commun 3A : DDRS : croissance et scénarios". 2024. 7 pages.