Matériaux 3A MFImater Automne 2020

Corrigé de l'examen initial du 10 Septembre 2020

Correction de l'exercice 1.

- On suppose donc que

$$0 < l \leq L. \tag{1}$$

- Le volume d'un parallélépipéde est égal au produit de la surface de base (ici, rectangle de largeur $2l - 2x$ et de longueur $2l - 2x$) par sa hauteur x. On a donc ici

$$v(x) = 4x(L - x)(l - x). \tag{2}$$

où x décrit l'intervalle $[0, l]$.

- De l'expression (2), on déduit l'expression de la dérivée $v'(x)$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 4\left((x - L)(x - l)x + (x - l)x + (x - L)x\right), \\ &= 4\left(x^2 - (l + L)x + lL + x^2 - lx + x^2 - Lx\right), \end{aligned}$$

et donc

$$v'(x) = 4\left(3x^2 - 2(l + L)x + lL\right). \tag{3}$$

- Ici, on cherche donc les racines de l'équation du second degré

$$3x^2 - 2(l + L)x + lL = 0. \tag{4}$$

Appliquons les formules du discriminant réduit : les racines de $ax^2 + 2b'x + c = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac, \\ x &= \frac{1}{a}\left(-b' \pm \sqrt{\Delta'}\right). \end{aligned}$$

On aurait pu aussi utiliser les formules habituelles équivalentes : les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac, \\ x &= \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{\Delta}\right). \end{aligned}$$

On a donc, en utilisant les formules du discriminant réduit,

$$\begin{aligned} \Delta' &= (l + L)^2 - 3lL, \\ &= l^2 + 2lL + L^2 - 3lL, \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta = l^2 + L^2 - lL. \tag{5}$$

- Dans l'énoncé, on nous affirme que
$$l^2 + L^2 - lL > 0. \tag{6}$$
Vérifions-le. On a supposé (1), ce qui implique $lL \leq L^2$ et donc $-lL \geq -L^2$ et ainsi
$$l^2 + L^2 - lL \geq l^2 + L^2 - L^2 = l^2 > 0.$$
Ainsi, les deux racines distinctes de (4), sont données par
$$x_1 = \frac{1}{3}\left(l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right), \tag{7a}$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\left(l + L + \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right), \tag{7b}$$
avec (puisque $\Delta > 0$)
$$x_1 < x_2. \tag{8}$$
- Dans l'énoncé, on nous affirme que
$$0 < x_1 < l \leq x_2. \tag{9}$$
Vérifions-le.
  - On a tout d'abord $x_1 > 0$, puisque c'est successivement équivalent à :
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right) > 0 &\Longleftrightarrow l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL} > 0,\\ &\Longleftrightarrow l + L > \sqrt{l^2 + L^2 - lL} > 0,\end{aligned}$$
et on peut élever au carré car tout est positif
$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow (l + L)^2 > l^2 + L^2 - lL,\\ &\Longleftrightarrow l^2 + 2lL + L^2 > l^2 + L^2 - lL,\\ &\Longleftrightarrow 3lL > 0,\end{aligned}$$
ce qui est vrai.
  - On a tout ensuite $x_1 < l$, puisque c'est successivement équivalent à :
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right) < l &\Longleftrightarrow l + L - \sqrt{l^2 + L^2 - lL} < 3l,\\ &\Longleftrightarrow l + L - 3l < \sqrt{l^2 + L^2 - lL},\\ &\Longleftrightarrow L - 2l < \sqrt{l^2 + L^2 - lL}.\end{aligned}$$
Si $L - 2l \leq 0$, c'est vrai, puisque $\sqrt{l^2 + L^2 - lL} > 0 \geq L - 2l$. Sinon, on a $L - 2l > 0$ et $L > 2l$ et, puique tout est positif, on peut élever au carré et on obtient successivement
$$\begin{aligned}(L - 2l)^2 < l^2 + L^2 - lL &\Longleftrightarrow L^2 - 4lL + 4l^2 < l^2 + L^2 - lL,\\ &\Longleftrightarrow -4lL + 4l^2 < l^2 - lL,\\ &\Longleftrightarrow 0 < -3l^2 + 3lL,\\ &\Longleftrightarrow 0 < 3l(L - l),\\ &\Longleftrightarrow 0 < l(L - l),\end{aligned}$$
ce qui est vrai car $l > 0$ et $L > l$, ce qui provient de $L > 2l > l$.
  - On a tout ensuite $x_2 \geq l$, puisque c'est successivement équivalent à :
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(l + L + \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right) \geq l &\Longleftrightarrow l + L + \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \geq 3l,\\ &\Longleftrightarrow \sqrt{l^2 + L^2 - lL} \geq 2l - L.\end{aligned}$$

Comme précédement, si $2l - L \leq 0$, c'est vrai. Sinon, on a $2l - L > 0$ et puique tout est positif, on peut élever au carré et on obtient successivement

$$\begin{aligned} l^2 + L^2 - lL \geq 4l^2 - 4lL + L^2 &\Longleftrightarrow -3l^2 + 3lL \geq 0, \\ &\Longleftrightarrow 3l(-l + L) \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est vrai grâce à (1).

-

x	0		x_1		l
signe de $v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$	0	$\nearrow$	$v_{\max}$	$\searrow$	0

Table 1. Tableau de variation de v

D'après (9), il suffit donc d'étudier le signe de v' sur l'intervalle $[0, l]$ qui contient x_1, x_2 étant à l'extérieur de cet intervalle. On sait que v' donné par (3) est négatif entre les racines x_1 et x_2 et positif à l'extérieur. En particulier, v' est positif sur $[0, x_1]$ et négatif sur $[x_1, l]$.

On obtient donc le tableau de variation 1 pour le volume $v(x)$. On en déduit que ce volume est maximal pour x donné par x_1, c'est-à-dire par (7a). De (2), on déduit l'expression du volume maximal :

$$v_{\max} = \frac{4}{27}\left(L + l - \sqrt{\Delta}\right)\left(L - 2l\sqrt{\Delta}\right)\left(l - 2L\sqrt{\Delta}\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) Grâce au cours, on obtient

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est même valable à l'ordre 3 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).$$

(2) On en déduit quand x est "proche de 0" :

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx S(x), \\ \cos(x) &\approx C(s), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S(x) &= x - \frac{1}{6}x^3, \\ C(s) &= 1 - \frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

On utilise cela pour approcher les valeurs de $\cos\left(10^{-3}\right)$ et $\sin\left(10^{-3}\right)$

(3) Numériquement, on trouve :

$$\begin{aligned} C(x) &= 9.999995000000000 \times 10^{-1}, \\ \cos x &= 9.999995000000417 \times 10^{-1}, \\ |\cos x - C(x)| &= 4.1633 \times 10^{-14}, \\ S(x) &= 9.999998333333334 \times 10^{-4}, \\ \sin x &= 9.999998333333417 \times 10^{-4}, \\ |\sin x - S(x)| &= 8.2399 \times 10^{-18}, \end{aligned}$$

ce qui confirme les faibles écarts.

Correction de l'exercice 3.

On cherche à calculer dans cet exercice, l'intégrale I définie par

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Deux façons de faire sont possibles. La première est très longue et fastidieuse, la seconde, beaucpoup plus rapide, mais nécessite de passer par la trigonométrie hyperbolique.

(1) On procède en plusieurs étapes :

(a) Remarquons que par parité

$$I = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}. \tag{10}$$

Si fait le changement de variable

$$x = \tan(t),$$

on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

et donc, il vient

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

On a aussi

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Enfin, $x = 0$ correspond à $t = 0$ et $x = 1$ correspond à $t = \pi/4$. Bref, il vient [1]

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\tan^2 t + 1}}, \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\left|\cos(t)\right| dt. \end{aligned}$$

1. Puisque $\sqrt{a^2} = |a|$, pour tout réel !

Sur $[0, \pi/4]$, la fonction cos est positive et donc

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}.$$

(b) La méthode générale de la section **??** du cours suggère de faire le changement de variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right). \tag{11}$$

Mais, ici, les règle simplificatrices de Bioche de la section **??** nous invite à faire le changement de variable

$$u = \sin t \tag{12}$$

puisque

$$\cos(\pi - t) = -\cos(-t) = -\cos t.$$

Grâce à (12), on a

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \cos t$$

et donc

$$du = \cos t dt.$$

Pour $t = 0$, on a $u = 0$ et pour $t = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$. Il vient donc

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}, \\ &= 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\cos t}\frac{1}{\cos t}, \\ &= 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\cos^2 t}, \\ &= 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{1-\sin^2 t}, \end{aligned}$$

et donc

$$I = -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^2-1}.$$

Remarque 1. Le lecteur averti remarquera que la fonction $u \mapsto u^2 - 1$ ne s'annulle pas sur $[0, \sqrt{2}/2]$ et donc que la fonction à intégrer est bien continue !

(c) On utilise maintenant la section **??** du cours qui suggère de décomposer $1/(u^2 - 1)$ en éléments simples : on montre donc aisément

$$\frac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right).$$

Les primitives des fonctions $u \mapsto 1/(u-1)$ et $u \mapsto 1/(u+1)$ sont [2] $u \mapsto \ln|u-1|$ et $u \mapsto \ln|u+1|$ et donc

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right) du, \\
&= -\left[\ln|u+1| - \ln|u+1|\right]_{u=0}^{u=\sqrt{2}/2}, \\
&= -\left[\ln\left|\frac{u+1}{1-u}\right|\right]_{u=0}^{u=\sqrt{2}/2},
\end{aligned}$$

et donc

$$I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}/2+1}{-\sqrt{2}/2+1}\right).$$

On peut simplifier l'argument du logaritme de façon classique :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}/2+1}{-\sqrt{2}/2+1} &= \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, \\
&= \frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}, \\
&= \frac{6+4\sqrt{2}}{4-2}, \\
&= 3+2\sqrt{2}, \\
&= \left(\sqrt{2}+1\right)^2,
\end{aligned}$$

et donc

$$I = \ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right),$$

et finalement

$$I = -2\,\ln\left(\sqrt{2}-1\right),$$

dont on vérifie que cela vaut bien

$$I = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right),$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned}
2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 2\ln\left(\sqrt{2}-1\right) &= 2\ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right), \\
&= 2\ln(2-1), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2) Beaucoup plus rapidement, On reprend (10), dans la quelle on fait le changement de variable :

$$x = \sinh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right),$$

on a donc

$$dx = (\sinh(t))' dt = \cosh(t) dt.$$

Si $x = 0$, on a $t = 0$ puisque $\sinh(0) = 0$. Cherchons à résoudre

$$1 = \sinh(t), \tag{13}$$

2. sur des intervalles où $u-1$ et $u+1$ sont de signe constant, ce qui est le cas ici.

dont on sait que la solution est unique puisque sinh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on peut utiliser la fonction réciproque de sinh, connue, ou la retrouver. (13) est successivement équivalente à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = 1 &\Longleftrightarrow e^t - e^{-t} = 2,\\ &\Longleftrightarrow e^{2t} - 1 = 2e^t,\\ &\Longleftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0,\end{aligned}$$

où $X = e^t$. On sait que $X \geq 1$ car $t \geq 0$. On résoud cette équation du second degré de discriminant réduit $\Delta' = 1 - \times(-1) = 1 + 1 = 2$ et donc

$$X = 1 \pm \sqrt{2},$$

dont la seule racine plus grande que 1 est

$$X = 1 + \sqrt{2}$$

et on a enfin

$$t = \ln(X) = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned}I &= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\cosh(t)dt}{\sqrt{1+\sinh(t)^2}},\\ &= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\cosh(t)dt}{\sqrt{\cosh(t)^2}},\\ &= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\cosh(t)dt}{|\cosh(t)|},\\ &= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} dt,\\ &= 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$