Matériaux 3A MFImater | Automne 2021

Corrigé de l'examen initial du 08 Septembre 2021

Correction de l'exercice 1.
On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2.
f est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - x.$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 1,$$

strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. On a $f(0) = 1$, $f(+\infty) = \infty$ et $f(-\infty) = -\infty$.
Le graphique de f est représenté sur la figure 1 page suivante.

Correction de l'exercice 3.
On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = x^2 + 1 + o\left(x^3\right).$$

Correction de l'exercice 4.
Exercice donné en classe de troisième (par un collègue, peut-être un peu distrait !).

(1)

Notons d_1 la distance égale à 8 cm et d_2, la distance égale à 2 cm et faisons un raisonnement littéral en fonction de d_1 et d_2.

Notons S_1, la surface de liquide dans la bouteille à l'endroit, S_2, la surface de liquide dans la bouteille à l'envers (voir figure 2), S la surface de la base du cône et H, la hauteur du cône recherchée.

On sait que le volume d'un cône de hauteur h et de base de surface S est égale à

$$V = \frac{1}{3} hS. \tag{1}$$

Cette formule est vraie, quelque soit la surface de base (voir par exemple [Bas11, Annexe K]). Pour la bouteille à l'endroit de la figure 2, on a d'après (1),

$$V_{\text{vide}} = \frac{1}{3} d_1 S_1,$$

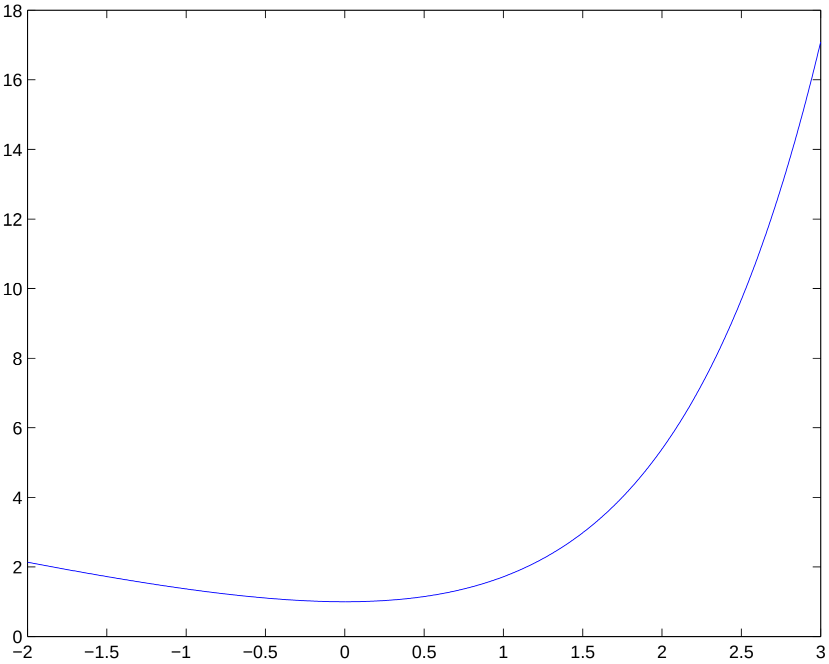

FIGURE 1. Le graphe de f.

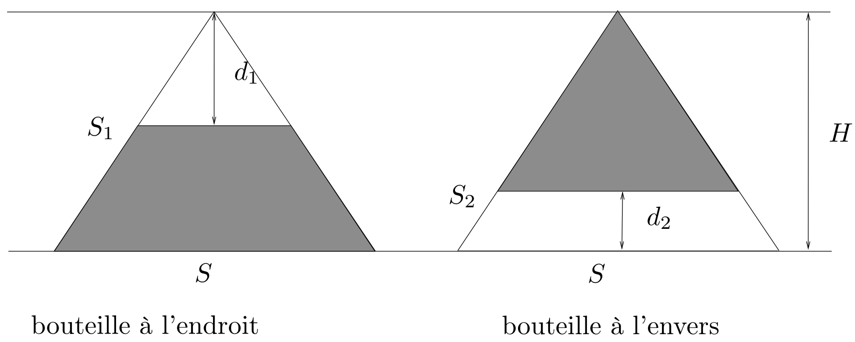

FIGURE 2. La bouteille conique à l'endroit et à l'envers.

et donc, en notant $V = SH/3$, le volume total du cône, o a

$$V_{\text{liquide}} = \frac{1}{3}HS - V_{\text{vide}},$$

et donc

$$V_{\text{liquide}} = \frac{1}{3}HS - \frac{1}{3}d_1S_1. \tag{2}$$

Pour la bouteille à l'envers de la figure 2, on a de même

$$V_{\text{liquide}} = \frac{1}{3}(H - d_2)S_2. \tag{3}$$

D'après (2) et (3), on a donc (puisque c'est le même volume de liquide dans les deux bouteilles, à l'endroit à l'envers)

$$\frac{1}{3}HS - \frac{1}{3}d_1S_1 = \frac{1}{3}(H - d_2)S_2,$$

et donc

$$HS = d_1 S_1 + (H - d_2) S_2.$$

et donc

$$H = d_1 \frac{S_1}{S} + (H - d_2) \frac{S_2}{S}. \tag{4}$$

Par ailleurs, si on note r_1 (resp. R, r_2), le rayon du cercle correspondant à la surface S_1 (resp. S, S_2), on a, d'après le théorème de Thalés (en raisonnant comme dans [Bas11, Annexe K]),

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{r_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{d_1}{H}\right)^2,$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 = \left(\frac{H - d_2}{H}\right)^2,$$

ce qui donne, grâce à (4)

$$H = d_1 \left(\frac{d_1}{H}\right)^2 + (H - d_2)\left(\frac{H - d_2}{H}\right)^2,$$

et donc

$$d_1^3 + (H - d_2)^3 = H^3.$$

Si on développe, cela est équivalent à

$$d_1^3 + H^3 - 3H^2 d_2 + 3H d_2^2 - d_2^3 = H^3,$$

soit encore

$$-3H^2 d_2 + 3H d_2^2 + d_1^3 - d_2^3 = 0. \tag{5}$$

Remarque 1. Ce résultat est vrai en fait pour toute bouteille conique, de surface de base quelconque.

(2) On cherche donc à résoudre l'équation (5).

- Premier cas : $d_2 = 0$.
  L'équation (5) est donc équivalente à

  $$d_1 = 0.$$

  Dans ce cas, la hauteur H n'est pas définie. En effet, $d_1 = d_2 = 0$ signifie que la bouteille à l'envers et à l'endroit est toujours pleine de liquide, ce qui est vraie pour toute hauteur H !
- Second cas : $d_2 \neq 0$ et on a donc

  $$d_2 > 0. \tag{6}$$

  L'équation (5) est donc équivalente à

  $$H^2 - d_2 H + \frac{1}{3d_2}\left(-d_1^3 + d_2^3\right) = 0, \tag{7}$$

  qui est une équation du second degré que l'on résoud comme d'habtiude. Son discriminant vaut

  $$\begin{aligned}\Delta &= d_2^2 - \frac{4}{3d_2}\left(-d_1^3 + d_2^3\right), \\ &= \frac{1}{3d_2}\left(3d_2^3 + 4d_1^3 - 4d_2^3\right), \\ &= \frac{1}{3d_2}\left(4d_1^3 - d_2^3\right),\end{aligned}$$

  du signe de

  $$\widetilde{\Delta} = 4d_1^3 - d_2^3. \tag{8}$$

  Il existe donc une racine positive ssi

  $$\widetilde{\Delta} \geq 0. \tag{9}$$

Dans ce cas, la ou les racines correspondent aux valeurs strictement positives (la hauteur nulle sera écartée)

$$X = \frac{1}{2}\left(d_2 \pm \sqrt{\frac{1}{3d_2}\left(4d_1^3 - d_2^3\right)}\right). \tag{10}$$

Remarque 2. On connaît aussi la somme [1] des racines de l'équation (7) qui vaut d_2 et qui est strictement positif selon (6). La demi-somme des racines est donc strictement positive. On sait donc que si les racines sont réelles (c'est-à-dire, si (9) est vérifié), il y en a au moins une strictement positive. Pour que les deux soient positives strictement, il suffit que leur produit soit strictement positif. Or, le produit des racines vaut

$$p = \frac{1}{3d_2}\left(-d_1^3 + d_2^3\right) = \frac{1}{3d_2}(d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2).$$

et est de signe proportionnel à

$$p = d_2 - d_1. \tag{11}$$

Bref :

- Si $\widetilde{\Delta}$, donné par (8), est strictement négatif, il n'y a pas de solution ;
- Si $\widetilde{\Delta}$, donné par (8), est nul, il y a une seule racine strictement positive.
- Si $\widetilde{\Delta}$, donné par (8), est strictement positif, il y a une seule racine strictement positive ssi p donné par (11) est négatif ou nul et il y a deux racines strictement positives ssi p donné par (11) est strictement positif.

On obtient ici, pour $d_1 = 8$ et $d_2 = 2$, une seule solution H donnée par

$$H = 1 + 1/12\sqrt{12240} = 1 + \sqrt{85},$$

soit, numériquement

$$H = 10.2195444573.$$

Références

[Bas11] J. Bastien. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie.* Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT25. 2011. 180 pages.

1. En effet, on sait que la somme et le produit des racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ valent respectivement $-b/a$ et c/a.