Mécanique 3A MNB — Automne 2022

QCM (maison) pour le 16 novembre 2022

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire .

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

section A.1 (annexes du corrigé de TD)

Question 1 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ données par

$$f(x_0) = 3, \quad f(x_1) = 7, \quad f(x_2) = 23, \quad f(x_3) = 57.$$

Π_3, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, est égal à

■ $x^3 + 3\,x^2 + 3$
□ $3\,x^3 + 9\,x^2 + 3$
□ 0
□ x^6

Explication **:** On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3
$x_0 = 0$	$\boxed{3}$			
		$\boxed{4}$		
$x_1 = 1$	7		$\boxed{6}$	
		16		$\boxed{1}$
$x_2 = 2$	23		9	
		34		
$x_3 = 3$	57			

Le polynôme Π_3 ne peut valoir 0 puisque les données sont non nulles, ni x^6 de degré strictement supérieur à 3. Le coefficient dominant de Π_n est égal à la différence divisé $f[x_0, ..., x_n]$. Ici, pour $n = 3$, le coefficient dominant de Π_3 est égal à la différence divisé $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$. Parmi les deux polynômes qui restent, un seul a un coefficient dominant égal à 1, c'est $x^3 + 3\,x^2 + 3$. Π_3 vaut donc $x^3 + 3\,x^2 + 3$. Il n'était donc pas nécessaire de calculer complétement le polynôme Π_3 !
On peut aussi retrouver par le calcul, à partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, le polynôme Π_3.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant.

Question 2 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ données par

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = 0.8414710, \quad f(x_2) = 0.9092974, \quad f(x_3) = 0.1411200.$$

Π_3, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, est égal à

- ☒ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x$
- ☐ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x + 3$
- ☐ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x + 6$
- ☐ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 + 7$

Explication : On constate que f est nulle en 0, ce qui doit être aussi le cas de Π_3. Or, on constate qu'un seul polynôme a un coefficient constant nul, c'est $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x$, qui est donc Π_3. Il était donc intutile de déterminer complètement ce polynôme !
Autrement, on pouvait raisonner comme suit :
On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3
$x_0 = 0$	$\boxed{0}$			
		$\boxed{0.8414710}$		
$x_1 = 1$	0.8414710		$\boxed{-0.3868223}$	
		0.0678264		$\boxed{-0.0103932}$
$x_2 = 2$	0.9092974		-0.4180019	
		-0.7681774		
$x_3 = 3$	0.1411200			

À partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, on detétermine le polynôme Π_3 et on constate qu'il vaut $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x$, aux inévitable erreurs d'arrondis près !
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant, aux inévitable erreurs d'arrondis près !.

Question 3 ♣ On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ données par

$$f(x_0) = 5, \quad f(x_1) = 16, \quad f(x_2) = 31.$$

Π_2, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$, est égal à

- ☒ $2\,x^2 + 5\,x - 2$
- ☒ $(x-1)\,(2\,x+7) + 5$
- ☐ $2\,x^2 + 21\,x + 18$
- ☐ $2\,x^2 + 17\,x + 13$
- ☐ $2\,x^2 + 10\,x + 3$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 1$	$\boxed{5}$		
		$\boxed{11}$	
$x_1 = 2$	16		$\boxed{2}$
		15	
$x_2 = 3$	31		

À partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, on detétermine le polynôme Π_2 et on constate qu'il vaut sous sa forme de Newton $(x-1)\,(2\,x+7) + 5$ et sous sa forme développée (canonique) $2\,x^2 + 5\,x - 2$.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant.

Question 4 Parmi les figures 1 de la page 5, celle qui représente les polynômes de Lagrange relatifs au support défini par les points :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3,$$

est la figure :

☐ 1(a) ☐ 1(b) ☐ 1(c) ■ 1(d) ☐ 1(e)

Explication : Conformément au lemme A.1 (annexes du corrigé de TD), les polynômes de Lagranges sont de degré n où le nombre de points est égal à $n+1$. On a donc ici $n = 3$. D'après les équations (A.1) (annexes du corrigé de TD) ou (A.2) (annexes du corrigé de TD) les polynômes l_i doivent s'annuler en $n = 3$ points et seuls, les polynômes de la figure 1(d) vérifient cela ! On vérifie de plus que l'on a bien l'équation (A.1) (annexes du corrigé de TD) ou l'équation (A.2) (annexes du corrigé de TD). Pour vérifier tout cela, il n'est pas nécessaire de calculer les polynômes de Lagranges l_i !

Question 5
On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 3}$ données par

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3,$$

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 8,$$

Sur la figure 2 de la page 6, le polynôme interpolateur Π_3 de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ est representé en trait

■ continu ☐ tiret-point $(-.)$ ☐ tiret-tiret $(--)$

Explication : D'après la proposition A.2 (annexes du corrigé de TD), le polynôme Π_3 vaut $y_i = f(x_i)$ aux points x_i. Seul, le polynôme de la figure 2 en trait continu vérifie cela (bien observer les ordonnées des étoiles $(*)$ sur la figure). Pour vérifier tout cela, il n'est pas nécessaire de calculer le polynôme interpolateur Π_3 !

Question 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme d'interpolation Π_n relatif au support $\{x_0, ..., x_n\}$ est de degré

☐ exactement n
☐ supérieur ou égal à n
■ inférieur ou égal à n
☐ 3

Explication : Voir la proposition A.2 (annexes du corrigé de TD).

Question 7 Soient $x_0 = A < x_1 < \cdots < x_N = B$ des points qui divisent $I = [A, B]$. On note $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ les sous-intervalles de longueur h_j et $h = \max\limits_{1\leq j\leq N} h_j$. Sur chaque sous-intervalle I_j, on interpole $f_{|I_j}$ par un polynôme de degré n avec des points équirépartis. Le polynôme par morceaux est noté $\Pi_n^h f(x)$. Un majorant de l'erreur commise dans l'interpolation par morceaux est donné par

■ $\frac{1}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| h^{n+1}$
☐ $\frac{(B-A)^{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \frac{1}{N^{n+1}}$
☐ $\frac{1}{8(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+3)}(x)\right| h^{n+1}$

Explication : Voir la proposition A.11 (annexes du corrigé de TD).

section A.2 (annexes du corrigé de TD)

Question 8 La méthode d'intégration élémentaire de Simpson sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par

■ $\frac{1}{6}(b-a)(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b))$
☐ $\frac{1}{6}(b-a)(f(a) + 5f((a+b)/2) + f(b))$
☐ $\frac{1}{16}(b-a)(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b))$

Explication : Voir le tableau A.3 (annexes du corrigé de TD).

Question 9 ♣ La méthode d'intégration composite des trapèzes sur l'intervalle $[A, B]$, avec N sous-intervalles est donnée par

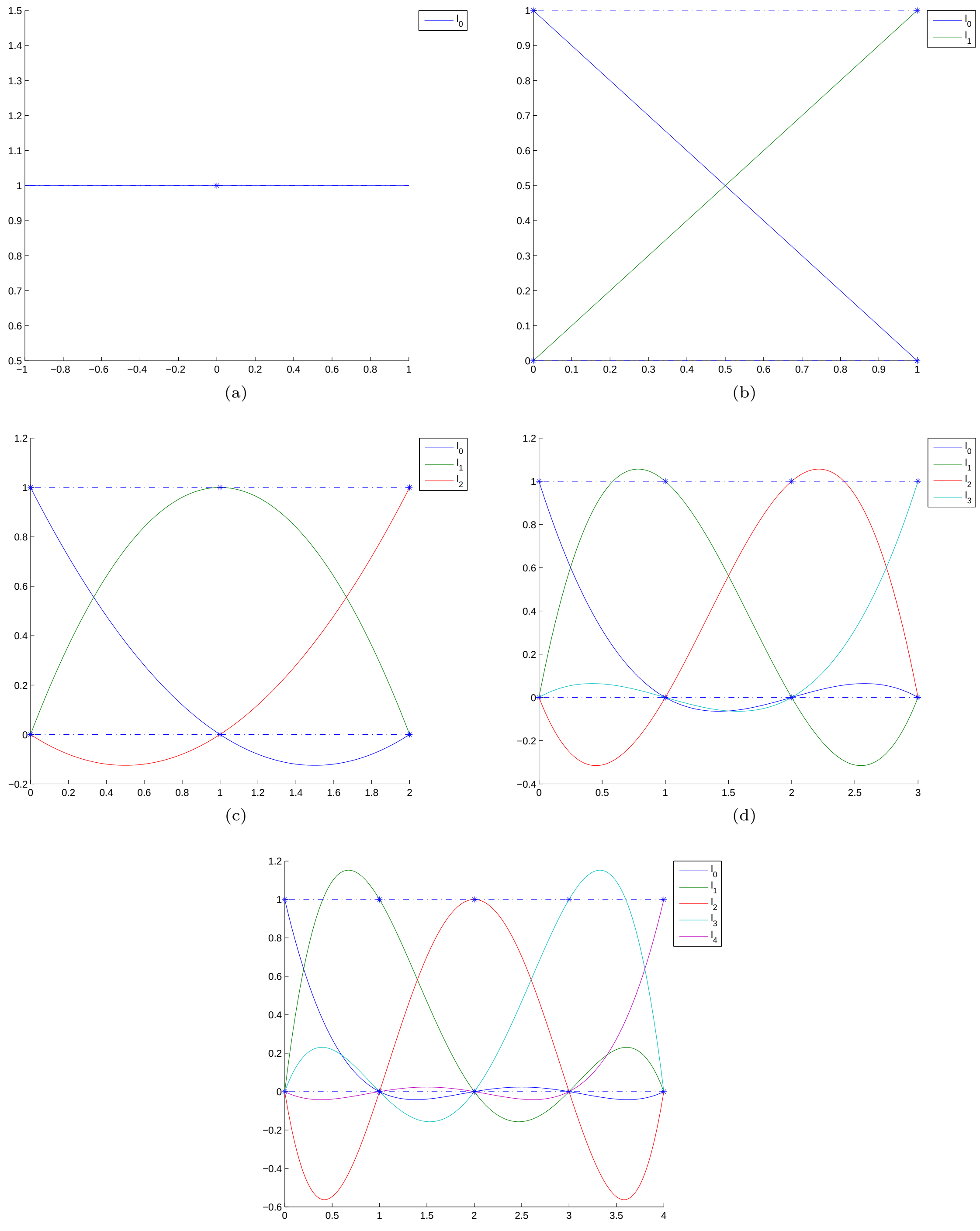
■ $\frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + h\sum\limits_{i=1}^{N-1} f(x_i)$
☐ $h\big(f(A) + f(B)\big) + \frac{h}{2}\sum\limits_{i=1}^{N-1} f(x_i)$
■ $\frac{h}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1} f(x_i) + f(x_{i+1})$
☐ $\frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + \frac{h}{2}\sum\limits_{i=1}^{N-1} f(x_i)$
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir le tableau A.4 (annexes du corrigé de TD).

Question 10 ♣ L'approximation I_4^T de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ en appliquant la méthode du trapèze composite avec 4 sous-intervalles vaut

- ■ $1/8 + 1/8\,e^{-1} + 1/4\,e^{-1/16} + 1/4\,e^{-1/4} + 1/4\,e^{-\frac{9}{16}}$
- ■ 0.742984
- ☐ $1/4 + 1/4\,e^{-1} + 1/2\,e^{-1/16} + 1/2\,e^{-1/4} + 1/2\,e^{-\frac{9}{16}}$
- ☐ 2.228952
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir exercice de TD 2.1.



(a) (b) (c) (d) (e)

Figure 1 – Quelques tracés de polynômes de Lagrange l_i (question 4).

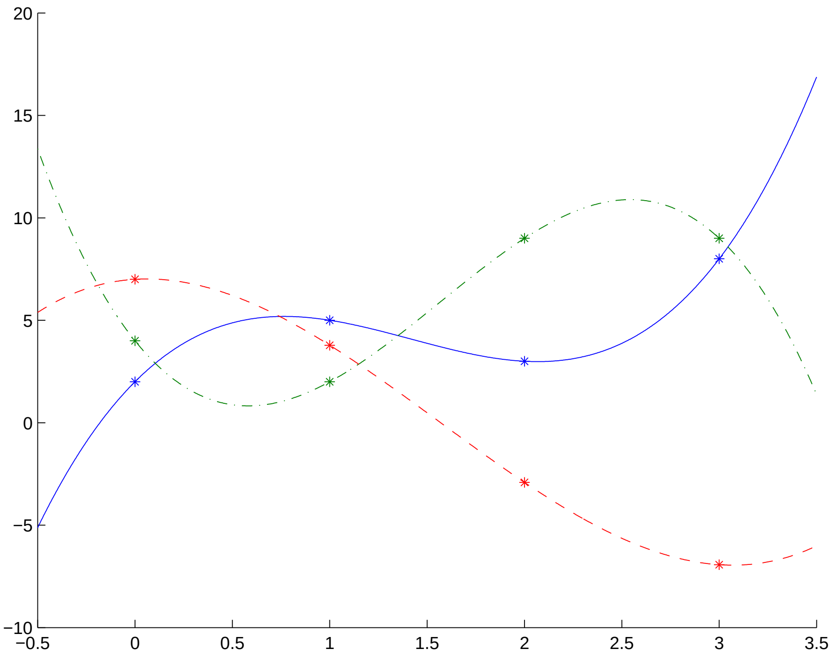


Figure 2 – Plusieurs polynômes interpolateurs Π_3 (question 5).