Mécanique 3A MNB — Automne 2022

QCM (maison) pour le 04 janvier 2023

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

section A.4 (annexes du corrigé de TD)

Question 1 ♣ L'équation différentielle ordinaire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = 3y(t) - 3t$$

se met sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

avec

- ■ $f(t, y) = 3y - 3t$
- ■ $f(t, y(t)) = 3y(t) - 3t$
- ■ $f(\tau, u) = 3u - 3\tau$
- ■ $f(\tau, w) = 3w - 3\tau$
- □ $f(t, y) = 3y(t) - 3t$
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication **:** Soit le problème de Cauchy linéaire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = 3y(t) - 3t, \tag{2a}$$

$$y(0) = 1. \tag{2b}$$

On met (2a) sous la forme (1) : pour tout t, on a

$$y'(t) = 3y(t) - 3t = f(t, y(t)),$$

et donc, pour tout t et pour tout y, on a :

$$f(t, y) = 3y - 3t. \tag{3}$$

Ne surtout pas écrire :

$$f(t, y) = 3y(t) - 3t.$$

Pour éviter cela, on remplace parfois (3) par

$$f(t, u) = 3u - 3t. \tag{4}$$

Question 2 Le schéma d'Euler rétrograde (ou implicite) s'écrit :

- □ $\forall n \in \{0, ..., N-1\}, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
- ■ $\forall n \in \{0, ..., N-1\}, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$

Explication **:** Voir la définition A.35 (annexes du corrigé de TD) du cours.

Question 3 On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = 2\,t + 2\,\cos\left(y(t)\right), \tag{1a}$$
$$y(0) = 1, \tag{1b}$$

avec $T = 0.020000$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et, pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, $t_n = hn$. On choisit $N = 3$. Les approximations de y_n de $y(t_n)$, pour $n \in \{0,1,2,3\}$, avec le schéma d'Euler progressif (dit aussi d'Euler explicite) pour le problème (1) sont données par

- [x] $\{1.0000000, 1.0072040, 1.0144159, 1.0216353\}$
- [ ] $\{-0.6847738, 0.9479659, 0.9275149, -0.0298815\}$
- [ ] $\{1.0000000, 0.0944385, 0.9282045, 0.9498930\}$

Explication **:** Voir la définition A.34 (annexes du corrigé de TD) du cours.

Question 4 On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = 2\,t^2 + 3\,y(t), \tag{1a}$$
$$y(0) = 3, \tag{1b}$$

avec $T = 0.020000$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et, pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, $t_n = hn$. On choisit $N = 2$. Les approximations de y_n de $y(t_n)$, pour $n \in \{0,1,2\}$, avec le schéma de Runge-Kutta 2 pour le problème (1) sont données par

- [x] $\{3.0000000, 3.0913510, 3.1854877\}$
- [ ] $\{-1.0974031, 2.7835888, -2.9660325\}$
- [ ] $\{3.0000000, 1.9998434, 1.2412484\}$

Explication **:** Voir la définition A.36 (annexes du corrigé de TD) du cours.

Question 5 On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = 2\,t + 2\,\cos\left(y(t)\right), \tag{1a}$$
$$y(0) = 1, \tag{1b}$$

avec $T = 0.020000$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et, pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, $t_n = hn$. On choisit $N = 1$. Les approximations de y_n de $y(t_n)$, pour $n \in \{0,1\}$, avec le schéma de Runge-Kutta 4 pour le problème (1) sont données par

- [x] $\{1.0000000, 1.0216463\}$
- [ ] $\{1.0000000, -0.0209143\}$
- [ ] $\{-0.1088276, 0.2989603\}$

Explication **:** Voir la définition A.37 (annexes du corrigé de TD) du cours.

Question 6 ♣ L'équation différentielle d'ordre 4

$$y^{(4)}(t) = y'(t) + \cos(y''(t)) + \big(y'''(t)\big)^2 + \sin(t), \tag{1a}$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 2, \tag{1b}$$

■ se met sous la forme équivalente

$$y_1'(t) = y_2(t), \tag{2a}$$
$$y_2'(t) = y_3(t), \tag{2b}$$
$$y_3'(t) = y_4(t), \tag{2c}$$
$$y_4'(t) = y_1(t) + \cos(y_2(t)) + (y_3(t))^2 + \sin(t), \tag{2d}$$

avec les conditions initiales

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 1, \quad y_4(0) = 2. \tag{3}$$

■ se met sous la forme équivalente

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \tag{4a}$$
$$Y(0) = \Xi_0, \tag{4b}$$

avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_1 + \cos(y_2) + y_3^2 + \sin(t) \end{pmatrix}, \tag{4c}$$

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4d}$$

□ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On procède comme dans l'exercice de TD 4.3. On pose

$$y_1(t) = y(t), \tag{5a}$$
$$y_2(t) = y'(t), \tag{5b}$$
$$y_3(t) = y''(t), \tag{5c}$$
$$y_4(t) = y'''(t), \tag{5d}$$

dont on déduit (2). Les conditions initiales (1b) sont alors équivalentes à (3). En posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

et en considérant F définie par (4c), on écrit donc (2) sous la forme (4a) et les conditions initiales (3) sous la forme (4b)-(4d).

Question 7 ♣ Le système différentiel

$$x'(t) = x(t)z(t), \tag{1a}$$
$$x''(t) = -x(t)z(t) + \cos(t), \tag{1b}$$
$$z'(t) = x(t)z(t) + \sin(t) \tag{1c}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad z(0) = 3 \tag{1d}$$

- [x] peut
- [ ] ne peut pas
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

se mettre sous la forme équivalente

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \tag{2a}$$
$$Y(0) = \Xi_0, \tag{2b}$$

en choisissant judicieusement F et Ξ_0.
Explication : On procède comme dans l'exercice de TD 4.4. On pose

$$y_1(t) = x(t), \tag{3a}$$
$$y_2(t) = x'(t), \tag{3b}$$
$$y_3(t) = z(t), \tag{3c}$$

et on obtient la forme (2)

Généralités

Question 8 ♣ On suppose que l'on a montré l'assertion

$$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B},$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propriétés. Alors,

- [x] la propriété $\mathcal{A}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{B}$
- [x] la propriété $\mathcal{B}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{A}$
- [x] la propriété $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{A}$
- [x] la propriété $\mathcal{A}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{B}$
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Simple question de vocabulaire, puisque

$$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B},$$

est équivalent à

$$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$$

Question 9 ♣ On suppose que l'on a montré l'assertion

$$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont trois propriétés. Alors, la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si

- [ ] la propriété $\mathcal{A}$ est vraie
- [ ] la propriété $\mathcal{B}$ est vraie
- [x] les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Pour que $\mathcal{C}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient vraies. Les choix que vous faites portent sur des points qui sont indépendants ! Il ne faut pas comprendre qu'il faut donner comme bonnes réponses "la propriété $\mathcal{A}$ est vraie" et "la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", puisqu'ensemble, elles assurent que $\mathcal{C}$ est vraie. Il faut comprendre que, indépendament les unes des autres, les assertions "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{A}$ est vraie", "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si la propriété $\mathcal{B}$ est vraie", sont fausses tandis que l'assertion "la propriété $\mathcal{C}$ est vraie si les propriétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies" est vraie. Prenez-en de la graine pour les éventuels QCM à venir ....