TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UE MNB

Mécanique 3A

MÉTHODES NUMÉRIQUES DE BASE

2022-2023, Automne

N. Débit, S. Millet & J. Bastien

Document compilé le 9 août 2023

Le lien original de ce document est le suivant :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/TDMNB.pdf`

Liste des Travaux Dirigés

Avant-propos

Ce polycopié constitue les TD de Méthodes Numériques de Base du département Mécanique 3A (2022-2023, Automne).

Ce polycopié de TD est normalement disponible à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`Mécanique 3A`'.
  — enfin sur '`MNB`'.

Des exercices facultatifs, non traités en séances (sauf si demande), sont proposés sur cette version distribuée sur le Ouaib et le réseau.

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Interpolation

EXERCICE 1.1.
On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 3$, $x_1 = 5$ et $x_2 = 8$:

$$g(x_0) = -2, \quad g(x_1) = 2, \quad g(x_2) = 3.$$

(1) Construire les interpolants de Lagrange pour trouver le polynôme de degré au plus 1 (noté $\Pi_1(g)$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 et x_1. Pour $\alpha = 4.8$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

(2) Construire les interpolants de Lagrange pour trouver le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2(g)$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0, x_1 et x_2. Donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

(3) Traiter de nouveau ces deux questions en utilisant la forme de Newton.

(4) Comparer les deux méthodes et conclure.

EXERCICE 1.2. Soient $a = 5$, $b = 6$, $A = 2$, $B = 3$. On se donne la fonction :

$$f(x) = \ln(Ax + B), \quad x \in [a, b]$$

(1) Donner l'expression du polynôme $\Pi_3 f$ de degré 3 interpolant f aux nœuds de Chebyshev x_0, x_1, x_2, x_3, que l'on calculera.

(2)

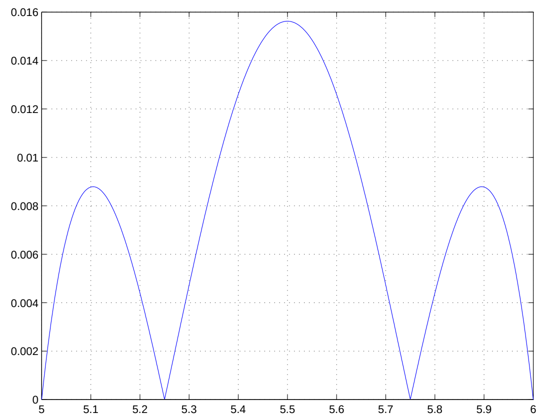

FIGURE 1.1. Le graphique de la fonction $x \mapsto |\omega_4(x)|$.

Estimer l'erreur $E_3(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_3 f(x)|$ sachant que la fonction $|\omega_4(x)| = |\prod_{i=0}^{3}(x - x_i)|$ est représentée par la figure 1.1.

EXERCICE 1.3. Soit la fonction à valeurs réelles :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction f aux nœuds équidistribués $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(1) Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ en fonction du degré n du polynôme $\Pi_n f$. Etudier le comportement de l'erreur lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

(2) Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$.

(3) Est-ce que tous les résultats sont encore valables pour g définie par

$$\forall x \in [6000, 6001], \quad g(x) = \sin\left(\frac{x - 6000}{3}\right) ?$$

EXERCICE 1.4. Soit la fonction f à valeurs réelles :

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

On considère le polynôme composite $\Pi_1^h f$ de degré 1 par morceaux qui interpole la fonction f sur N sous-intervalles de longueur uniforme h.
Trouver le nombre minimal N de sous-intervalles pour que l'erreur $E_1^h(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_1^h f(x)|$ soit inférieure à $5\,10^{-7}$.

EXERCICE 1.5.
On dispose des résultats expérimentaux pour la position $f(t)$ d'une étoile à différents temps t,

t	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	3.0000	3.5000	4.0000
$f(t)$	4.4781	5.3991	6.5413	7.8291	9.1963	10.6010	12.0028

(1) Utiliser la forme de Newton du polynôme d'interpolation (table des différences divisées) pour estimer la position de l'étoile au temps $\tau = 3.1$, au moyen d'un polynôme cubique.

(2) Donner l'expression analytique de l'erreur pour le polynôme obtenu.

(3) Donner une approximation de l'erreur commise dans cette estimation.

On pourra consulter l'exercice très proche 1.7.

Exercices facultatifs

EXERCICE 1.6.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, et des points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ deux à deux distincts. Soit Π_n relatif au support $\{x_0, ..., x_n\}$ tel que,

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad \Pi_n(x_i) = y_i.$$

(1) Construire des points $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que Π_n soit de degré exactement égal à p.

(2) Application numérique :

On choisit $n = 3$, $p = 2$ et les points $(x_i)_{0\leq i\leq 3}$ donnés par

$$\forall i \in \{0, ..., 3\}, \quad x_i = i.$$

Déterminer des valeurs de y_i et construire Π_3.

Cet exercice a été donné à l'examen d'Automne 2020.

EXERCICE 1.7.
En course à pied sur route, on utilise des modèles d'interpolation pour estimer, à partir de performances (temps) qu'un coureur a déjà réalisées sur certaines distances, les performances qu'il pourrait réaliser sur d'autres distances. On cherche ainsi à approcher la fonction $t(x)$ qui indique le temps en secondes que le

coureur mettrait pour parcourir x mètres. On considère ici un coureur dont les performances sont indiquées dans le tableau suivant :

x (en mètres)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (en secondes)	0	13	245	1980

(1) Utiliser un polynôme d'interpolation de degré 2 pour estimer la performance que devrait réaliser ce coureur sur une distance de 5000 m.

(2) Donner une approximation de l'erreur commise dans cette estimation en calculant l'écart absolu avec l'estimation par un polynôme d'interpolation de degré 3.

TRAVAUX DIRIGÉS 2

Intégration

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 4.

EXERCICE 2.1. On recherche une approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, dont on ne connaît pas la primitive.

(1) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode du trapèze composite sur 4 sous-intervalles.

(2) Indiquer le terme d'erreur globale que l'on fait par cette méthode de trapèze composite.

Théoriquement de combien devrait-on diminuer le pas d'intégration, *i.e.*, la largeur des intervalles, pour faire une erreur 4 fois moins grande que celle commise en question 1 ? Justifier votre réponse.

(3) Déterminer alors le nombre d'intervalles minimal nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode du trapèze composite avec une erreur égale à

$$\varepsilon = 10^{-4}. \tag{2.1}$$

(4) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode de simpson composite sur 2 sous-intervalles.

(5) Déterminer maintenant le nombre d'intervalles minimal nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode de Simpson composite avec la même erreur que précédemment, donnée par (2.1).

EXERCICE 2.2. On considère la formule de quadrature $Q(f) = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + \alpha_3 f'(0)$, pour approcher numériquement l'intégrale $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$, f étant une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ et dérivable en 0.

(1) Trouver les poids α_j, $j = 1, 2, 3$, tels que la formule intègre exactement des polynômes jusqu'au degré 2. Quel est le degré d'exactitude de cette formule ?

(2) Utiliser la formule de quadrature trouvée pour calculer l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a,b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a,b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h\frac{B-A}{2}f'(\eta)$
milieu	$h^2\frac{B-A}{24}f''(\eta)$
trapèze	$-h^2\frac{B-A}{12}f''(\eta)$
Simpson	$-h^4\frac{B-A}{2880}f^{(4)}(\eta)$

Exercices facultatifs

EXERCICE 2.3.
Soit f, une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On considère la formule de quadrature

$$Q(f) = W_0 f(0) + W_1 f(1/2) + W_2 f(1), \tag{2.2}$$

pour approcher numériquement l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

(1) (a) Trouver les poids W_0, W_1, W_2 tels que la formule intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 2. On exprimera ces coefficients sous forme rationnelle.

(b) On propose dans cette question de procéder autrement pour éviter le calcul de l'inverse d'une matrice.

(i) Calculer $\Pi_2(f)$, le polynôme d'interpolation de f aux nœuds 0, 1/2, 1 en fonction de $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$.

(ii) Calculer

$$\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big) = \int_0^1 \Pi_2(f)(x)dx, \tag{2.3}$$

en fonction de $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$.

(iii) En justifiant et en utilisant l'égalité de $Q(\Pi_2(f))$ et de $\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big)$, en déduire de nouveau l'expression des poids W_0, W_1, W_2 .

(2) Calculer le degré d'exactitude de cette formule.

(3) (a) Utiliser la formule de quadrature trouvée pour donner une approximation numérique de l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

(b) Quelle est l'erreur alors commise ?

TRAVAUX DIRIGÉS 3

Équations non-linéaires

EXERCICE 3.1.
On considère la fonction suivante

$$f(x) = e^{2\,x} - 2\,x - 8.$$

(1) Déterminer le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \geq 0$.

(2) (a) Est-ce que la méthode de la bissection converge sur l'intervalle $[0, 1.2]$?

(b) Faire *quatre* itérations de la méthode de la bissection à partir de l'intervalle $[0, 1.2]$.

(3) Sans faire d'itérations, déterminer combien vous devriez faire d'itérations pour calculer la racine à l'aide de la méthode de la bissection, avec une précision de $\varepsilon = 1.0\,10^{-8}$. en partant de l'intervalle $[1.0, 2.0]$.

(4) Répondre aux questions 1, 2 et 3 lorsque

$$f(x) = x - \cos(x)$$

dans l'intervalle $[-1.0, 2.0]$.

EXERCICE 3.2.

(1)

On cherche à déterminer les racines de l'équation suivante, dite de Ferrari :

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0. \tag{3.1}$$

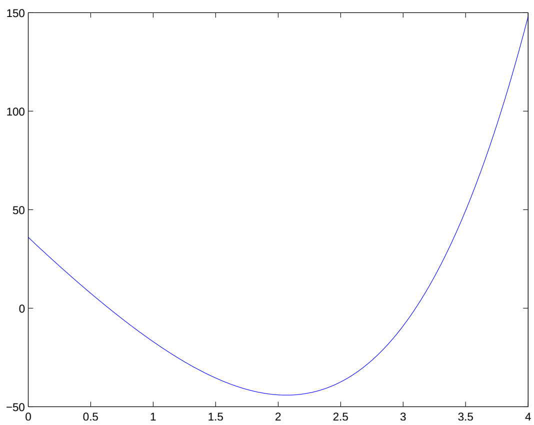

FIGURE 3.1. Le graphique de la fonction $x \mapsto x^4 + 6x^2 - 60x + 36$ sur $[0, 4]$.

Le graphique de cette fonction sur $[0, 4]$ est tracé sur la figure 3.1. Comment montrer que l'équation (3.1) n'a que deux racines sur $[0, 4]$?

(2) (a) Montrer que cette équation peut être mise sous la forme des équations de point fixe $x = g_i(x)$ avec :

$$g_2(x) = -\frac{36}{x^3 + 6x - 60}, \tag{3.2}$$

ou encore

$$g_3(x) = \left(-6x^2 + 60x - 36\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.3}$$

(b) Montrer que sur $[3, 31/10]$, la fonction g_2 vérifie

$$5 \leq g_2'(x) \leq 10.$$

Qu'en déduire sur la méthode du point fixe pour la fonction g_2 sur $[3, 31/10]$?

(c) (i) Montrer que la méthode du point fixe pour la fonction g_3 sur $[2, 4]$ est convergente vers l'unique solution de (3.1) sur $[2, 4]$.

(ii) Calculer les *sept* premiers itérés de la méthode du point fixe en partant de $x_0 = 2$.

(3) On étudie l'équation suivante

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0. \tag{3.4}$$

On étudiera cette équation transformée en équation du point fixe comme suit :

$$g(x) = x \text{ où } g(x) = 20/\left(x^2 + 2x + 10\right) \text{ avec } x \in [1, 2]\,. \tag{3.5}$$

L'exercice 3.2 est inspiré de [BM03, exercice 4.7 p. 175].

EXERCICE 3.3. On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 1/3\cos(x)\,. \tag{3.6}$$

et on pose

$$a = 0, \quad b = 1/2\,\pi. \tag{3.7}$$

(1) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a, b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a, b]$ vers $r = 0.3167508287712211718867961806109 6$.

(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 10^{-3}$.

(3) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 1$.

EXERCICE 3.4.
On considère la fonction à valeurs réelles : $f(x) = 4\cos(1/4\,\pi\, x) + 2\,e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 4]$.

(1) Montrer l'existence et l'unicité d'un zéro x^* sur l'intervalle $[0, 4]$.

(2) Ecrire la méthode de Newton pour la fonction f et montrer que la convergence est quadratique.

(3) Soit $x_{n+1} = g(x_n)$ la méthode de point fixe associée à la méthode de Newton. Démontrer que l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - x^*| \leq D\,|x_n - x^*|^2 \tag{3.8}$$

est satisfaite pour $D = \frac{1}{2} \max\limits_{x\in[0,4]} |g''(x)|$.

(4) On se place désormais sur l'intervalle $[1.8, 2.3]$ et on admet que l'étude précédente est encore valable sur cet intervalle. On admet que $D \leq D_0$ où

$$D_0 = 0.2. \tag{3.9}$$

Déterminer l'entier n pour lequel l'erreur $|x_n - x^*|$ est inférieure à ε défini par

$$\varepsilon = 10^{-10}. \tag{3.10}$$

EXERCICE 3.5.
On s'intéresse à l'équation

$$p(x) = 0, \tag{3.11}$$

où

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27. \tag{3.12}$$

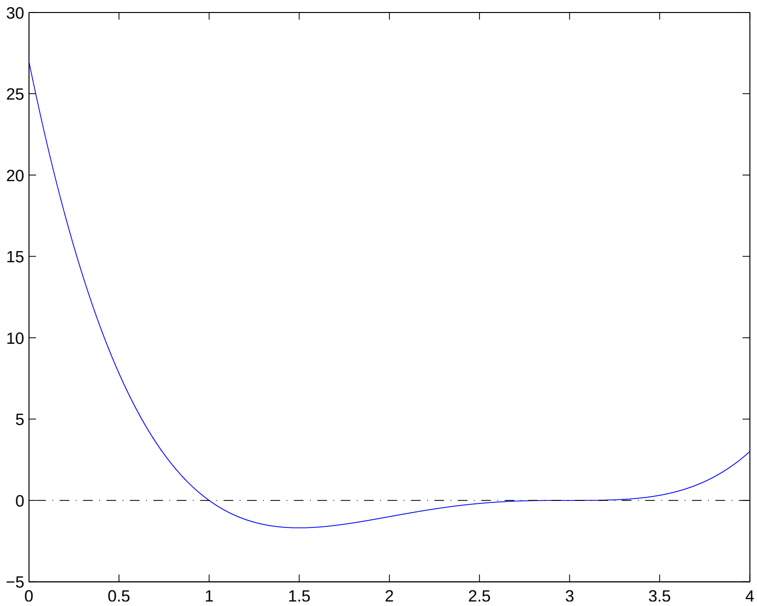

FIGURE 3.2. Fonction p.

La fonction polynôme p est représenté en figure 3.2. L'application de la méthode de Newton à l'équation (3.12) a produit les résultats donnés dans les tableaux 3.1 et 3.2 page suivante et sur les figures 3.3 et 3.4 page 10.

n	x_n
0	0.000000000000000
1	0.500000000000000
2	0.812500000000000
3	0.961647727272727
4	0.997950835032382
5	0.999993727092846
6	0.999999999940977
7	1.000000000000000
8	1.000000000000000

TABLE 3.1. Itérations de la méthode de Newton pour $x_0 = 0$.

(1) (a) Utiliser les résultats numériques du tableau 3.1 et de la figure 3.3 pour analyser la convergence de cet algorithme.

n	x_n
0	2.000000000000000
1	2.500000000000000
2	2.687500000000000
3	2.798519736842105
4	2.868284989458660
5	2.913246598147108
6	2.942608185005193
7	2.961929059988361
8	2.974701992272937
37	2.999972357393074
38	2.999975457082176
39	2.999980372188460
40	2.999991131057611
41	2.999991131057611

TABLE 3.2. Itérations de la méthode de Newton pour $x_0 = 2$.

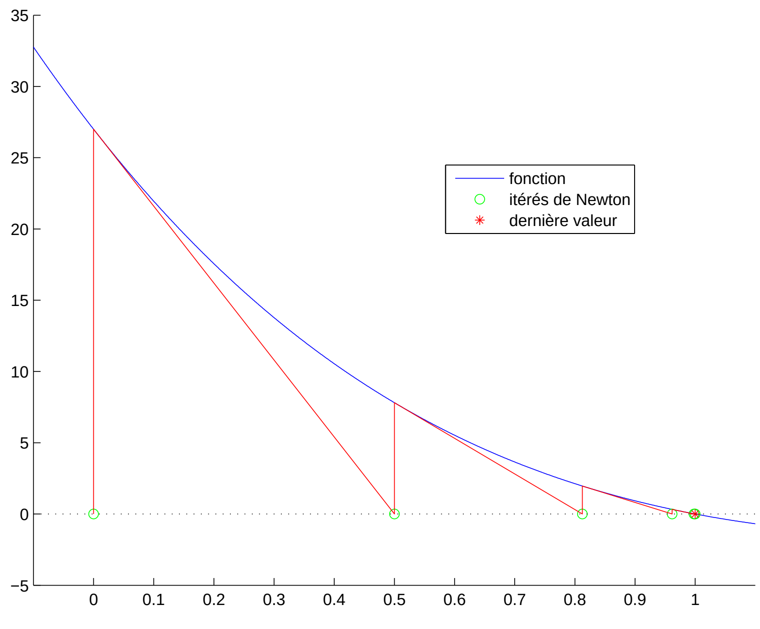

FIGURE 3.3. Graphiques des itérés de la méthode de Newton pour $x_0 = 0$.

(b) Pour déterminer l'ordre de convergence de cet algorithme, on pourra, dans un premier temps, observer le nombre de chiffres significatifs apparemment exacts.

(c) Dans un second temps, on pourra considérer que le dernier itéré (d'indice n_{f}) fournit la valeur exacte de la racine recherchée. En considérant la suite des erreurs « approchées » $e_n = x_n - x_{n_{\mathrm{f}}}$, dont les logarithmes en base[1] 10, notés log sont donnés dans le tableau 3.3, on pourra montrer que l'ordre p

1. Voir par exemple [Bas22, chapitre "Logarithme"].

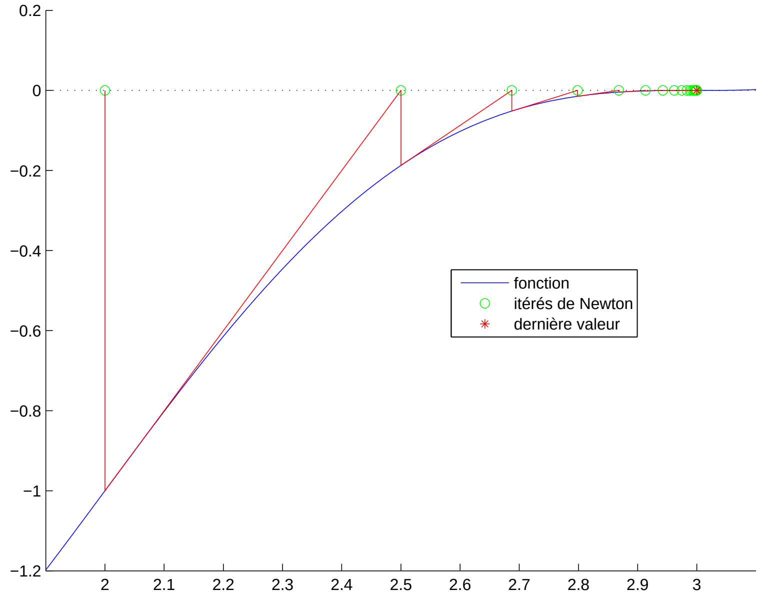

FIGURE 3.4. Graphiques des itérés de la méthode de Newton pour $x_0 = 2$.

n	$\log(\lvert x_n - x_{n_f}\rvert)$
0	-0.00000
1	-0.30103
2	-0.72700
3	-1.41621
4	-2.68842
5	-5.20253
6	-10.22898

TABLE 3.3. Logarithmes des erreurs approchées

de la méthode vérifie

$$\log(|e_{n+1}|) \approx p\log(|e_n|) + K$$

où K est une constante et utiliser le graphique du nuage de points $(\log(|e_n|), \log(|e_{n+1}|))$.

(2) Reprendre la question 1a en utilisant les résultats du tableau 3.2 et de la figure 3.4 pour analyser la convergence de cet algorithme. Les logarithmes en base 10 des erreurs sont donnés dans le tableau 3.4.

n	$\log(\|x_n - x_{n_f}\|)$
0	-0.01113
1	-0.32358
2	-0.54181
3	-0.75404
4	-0.97299
5	-1.21144
6	-1.49358
7	-1.89371

Table 3.4. Logarithmes des erreurs approchées

TRAVAUX DIRIGÉS 4

Équations différentielles

EXERCICE 4.1.
On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = t^3 y(t)^2, \tag{4.1a}$$

$$y(0) = 3, \tag{4.1b}$$

avec $T = 0.500000$.

(1) Faire trois itérations avec un pas $h = 0.100$ des méthodes d'Euler progressif (dite aussi Euler explicite) d'Euler modifiée (dite aussi Runge-Kutta d'ordre 2) et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour le problème (4.1).

(2) Montrer que la solution exacte de (4.1) est donnée par

$$\forall t \in [0,T], \quad y(t) = -12\left(3\,t^4 - 4\right)^{-1}. \tag{4.2}$$

Calculer les valeurs exacte de y aux instants t_i pour $0 \leq i \leq N$ et comparer aux valeurs approchées. Commenter.

(3) Quelle expression peut-on proposer pour approcher $y'(t_n)$?.

EXERCICE 4.2.
On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = -t^2 + y(t)t, \tag{4.3a}$$

$$y(0) = 1, \tag{4.3b}$$

avec $T = 2$.
Faire deux itérations avec un pas $h = 0.300000$ des méthodes d'Euler progressif (dite aussi Euler explicite) d'Euler modifiée (dite aussi Runge-Kutta d'ordre 2) et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour le problème (4.3).

EXERCICE 4.3.
Transformer l'équation différentielle suivante en une équation d'ordre 1 :

$$\forall t \in [0,T], \quad y^{(3)}(t) = y''(t) - 2y'(t) + y(t) - 2, \tag{4.4a}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = 2. \tag{4.4b}$$

EXERCICE 4.4.
On considère le système mécanique représenté sur la figure 4.1, formé de deux points matériels de masses m_1 et m_2, d'abscisses par rapport à la position d'équilibre $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Ces deux points matériels sont reliés à trois ressorts de raideur $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ et $k_3 > 0$. On suppose de plus que chacun des points matériels est soumis à une force extérieure $f_i(t)$ et à une force de frottement égale à $-c_i\dot{x}_i(t) - d_i\dot{x}_i^3(t)$ où $c_i, d_i \geq 0$, pour $i = 1, 2$. Le principe fondamental de la dynamique conduit aux deux équations suivantes

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)\,x_1(t) - k_2x_2(t) + c_1\dot{x}_1(t) + d_1\dot{x}_1^3(t) = f_1(t), \tag{4.5a}$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)\,x_2(t) + c_2\dot{x}_2(t) + d_2\dot{x}_2^3(t) = f_2(t). \tag{4.5b}$$

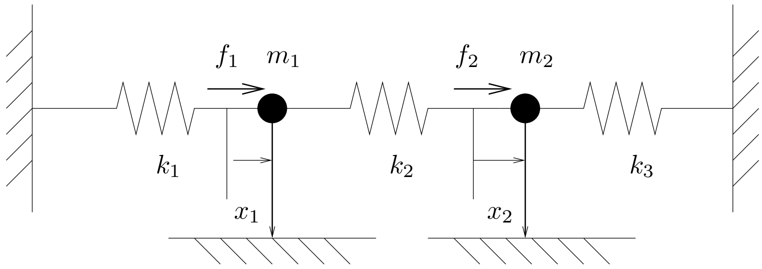

FIGURE 4.1. un système mécanique à deux degrés de liberté.

Le système différentiel (4.5) n'est pas une équation différentielle ordinaire de la forme

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \tag{4.6a}$$

$$Y(0) = \Xi_0, \tag{4.6b}$$

où $Y(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, mais nous allons montrer que nous pouvons l'écrire sous cette forme.
Pour toute la suite, nous supposerons, pour simplifier [1] que $m_1 = m_2 = 1$.

(1) Mettre le système (4.5) sous la forme (4.6) avec $p = 4$.

(2) Faire cinq itérations avec un pas $h = 0.010000$ de la méthode d'Euler progressive et avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&f_1 = f_2 = 0,\\
&c_1 = c_2 = c = 0.010000,\\
&d_1 = d_2 = d = 0.010000,\\
&k_1 = k_2 = k_3 = k = 1,\\
&x_1(0) = 1,\\
&\dot{x}_1(0) = 1,\\
&x_2(0) = 2,\\
&\dot{x}_2(0) = 1.
\end{aligned}$$

Comment peut on obtenir des approximations de $\dot{y}_1(t_i)$ et $\dot{y}_2(t_i)$?

L'exercice 4.4 est inspiré de [BM03, exercice 5.7 p. 215].

1. En divisant chacune des deux équations (4.5a) et (4.5b), c'est toujours possible, quitte à modifier les constantes k_i, c_i et d_i et les fonctions f_i.

Systèmes d'équations linéaires

EXERCICE 5.1. Résoudre le système linéaire suivant par une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage partiel :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 24 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.2. Résoudre le système linéaire suivant par une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage global (total) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 28 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.3. Soit le système linéaire suivant $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 25 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer la factorisation LU de la matrice A. (La factorisation LU est celle définie en cours avec une matrice U ayant des 1 sur la diagonale).
(2) En déduire la solution du système en utilisant les algorithmes de remontée et de descente.

Exercices facultatifs

EXERCICE 5.4. Soit A une matrice inversible de dimension 3 dont la décomposition LU obtenue avec permutation de lignes est donnée sous la forme compacte :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad O = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{est le vecteur de permutations.}$$

(La factorisation LU est celle définie en cours avec une matrice U ayant des 1 sur la diagonale)

(1) Calculer le déterminant de A au moyen de cette décomposition et retrouver la matrice A.
(2) Résoudre le système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ au moyen de la factorisation donnée en utilisant les algorithmes de remontée et de descente.

EXERCICE 5.5. Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{cccl} 9x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 13 \\ -x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 9 \\ x_1 & -2x_2 & +9x_3 & = -11 \end{array} \right.$$

à l'aide des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel à partir de $x^0 = {}^t[0\,0\,0]$. On calculera les 3 premiers itérés. (seuls les premiers itérés seront corrigés en séance).

Bibliographie

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.