Filière Mécanique – 3^{eme} année

Examen 2012-2013 : Méthodes Numériques de Base

28 janvier 2013
10h – 12h

Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso est autorisé.
Les calculatrices scientifiques de base sont autorisées.
Une réponse non justifiée se verra attribuer la note 0.
Déposez les cartes d'étudiants sur la table. Bon Travail !

EXERCICE 1

On considère la fonction $f(x) = 3x^3 - x - 3$.

Q1) Déterminer si la fonction f admet un zéro $\alpha \in I = [-3, 3]$ et si ce zéro est unique.

Q2) Est-ce que la méthode de bissection est convergente sur l'intervalle I ? Sinon proposer un autre intervalle de départ.

Q3) On note $x^{(k)}$ la valeur approchée du zéro trouvée à l'itération k. Calculer les trois premiers itérés et déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher α avec la tolérance $tol = 10^{-10}$.

Q4) Calculer les trois premiers itérés de la méthode de Newton pour calculer le zéro α avec la valeur initiale $x^{(0)} = 0$ puis $x^{(0)} = 1$. Laquelle de ces deux valeurs initiales doit-on préférer ?

Q5) Quel est l'ordre de convergence de cette méthode de Newton ?

EXERCICE 2

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$ et trois points $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.

Q1) Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$.

Q2) Calculer le polynôme de Lagrange qui interpole f et g sur le support donné.

Q3) Trouver la valeur approchée de g au point $x = 1.75$, et donner une majoration de l'erreur d'interpolation (à partir de la valeur exacte de g).

EXERCICE 3

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante

$$ml\ddot{\theta}(t) + \lambda l\dot{\theta}(t) + mg\sin(\theta(t)) = 0$$
$$\theta(0) = \pi/6,\ \dot{\theta}(0) = 0$$

avec : $m = 1$, $l = 3$, $g = -10$ et $\lambda = -0.5$.

Q1) Écrire le système d'équations différentielles ordinaires du 1er ordre équivalent à l'équation ci-dessus.

Q2) On fixe le pas $h = 0.05$. Calculer une approximation de la solution $\theta(t = 0.1)$ par la méthode d'Euler progressif.

Q3) Quel est l'ordre de ce schéma ? Peut-on choisir n'importe quelle valeur de h ? Justifiez votre réponse.

EXERCICE 4

On considère la formule de quadrature $b_1 f(0) + b_2 f(c_2)$, pour approcher numériquement l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, f étant une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$.

Q1) déterminer les paramètres b_1, b_2 et c_2 tels que le degré d'exactitude de la formule de quadrature soit maximal. Quel est alors le degré d'exactitude de cette formule ?

Q2) Utiliser la formule de quadrature trouvée pour calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$..

Q3) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode de trapèze composite sur 4 sous-intervalles.

Q4) Déterminer le nombre minimal de sous-intervalles nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode du trapèze composite avec une erreur de 10^{-5}.

EXERCICE 5

Soit le système linéaire suivant :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Résoudre ce système en utilisant la méthode d'élimination de Gauss avec pivotage partiel.