Mécanique 3A MNB — Automne 2013

Examen du 29 Janvier 2014

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
calculatrices scientifiques de base

Exercice 1.
On dispose des résultats expérimentaux pour la position $f(t)$ d'une étoile à différents temps t :

t	$f(t)$
1.00000	4.47550
1.50000	5.39960
2.00000	6.54960
2.50000	7.82160
3.00000	9.19970

(1) (a) En utilisant un polynôme de degré 2, déterminer une approximation de $f(\tau)$ pour $\tau = 1.2$.
(b) En utilisant un polynôme de degré 3, déterminer une approximation de $f(\tau)$ pour $\tau = 1.2$.

(2) On cherche, dans cette question à approcher l'intégrale de

$$I = \int_A^B f,$$

où $A = \min(t) = 1$ et $B = \max(t) = 3$.

(a) Proposer une approximation en utilisant la méthode composite des trapèzes.
(b)
On a déterminé une spline cubique passant par les points expérimentaux donnés. Voir la figure 1 page suivante.

(i) De quelles données auriez vous besoin pour déterminer la valeur de l'intégrale de cette spline sur $[A, B]$ en utilisant la méthode composite du point milieu et la méthode composite de Simpson ?

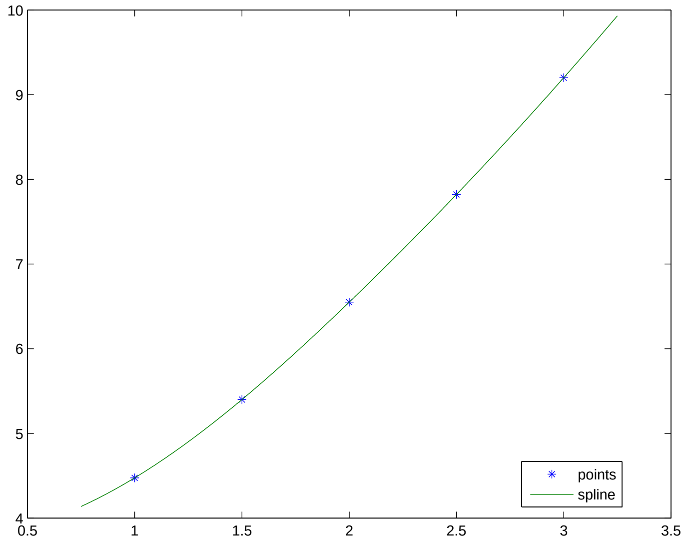

FIGURE 1. Les points $(t, f(t))$ et la spline construite.

(ii)

t	$f(t)$
1.25000	4.90144
1.75000	5.95423
2.25000	7.17272
2.75000	8.49701

En utilisant le tableau ci-dessus, qui contient les valeurs de f évaluées aux différents milieux grâce à la spline utilisée, calculer une approximation de l'intégrale de cette spline sur $[A, B]$ en utilisant la méthode composite du point milieu et la méthode composite de Simpson.

(c) *Question facultative*
Expliquer pourquoi l'approximation de l'intégrale de cette spline sur [A,B] par la méthode composite de Simpson est égale à son intégrale exacte.

Exercice 2.
Si vous avez une calculatrice qui ne dispose que des quatre opérations élémentaires, il est néanmoins possible d'estimer la racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ par la méthode de Newton.

(1) Donner une fonction f, polynomiale de degré strictement supérieur à 1, telle que $f(\sqrt{a}) = 0$.
(2) Écrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.
(3) Estimer la valeur de $\sqrt{10}$ obtenue avec cette méthode en partant de la valeur initiale $x_0 = 5$. On s'arrêtera quand l'erreur absolue sur la valeur finale sera inférieure à $1.0\,10^{-3}$.
(4) Quel est l'ordre de convergence de cette méthode ? Justifier votre réponse.

(5) Si on voulait développer un algorithme général qui fournit avec un minimum d'itérations la racine carrée d'un nombre positif quelconque, quelle stratégie recommanderiez-vous ? Faudrait-il préférer le méthode de Newton ou une autre méthode vue en cours ? Pourquoi ? Comment procéder pour choisir automatiquement une valeur initiale qui convienne ? (On pourra s'aider d'un schéma).

Exercice 3.
La solution de l'équation différentielle $y''(t) = -2y(t)y'(t)$ avec $y(t=0) = 0$, $y'(t=0) = 4$ tend rapidement vers une valeur asymptotique.

(1) Estimez cette valeur asymptotique en utilisant la méthode d'Euler progressif, avec un pas de $h = 0.25$.

(2) Tracer l'évolution de y en fonction du temps t obtenue par cette méthode sur la figure proposée en annexe (en figure 2 page 5). Sans refaire de calcul, proposer une solution pour améliorer ce résultat.

Exercice 4.
Résoudre le système linéaire suivant par une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage global :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & -2 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

[page blanche]

ANNEXE

Nom :
Prénom :

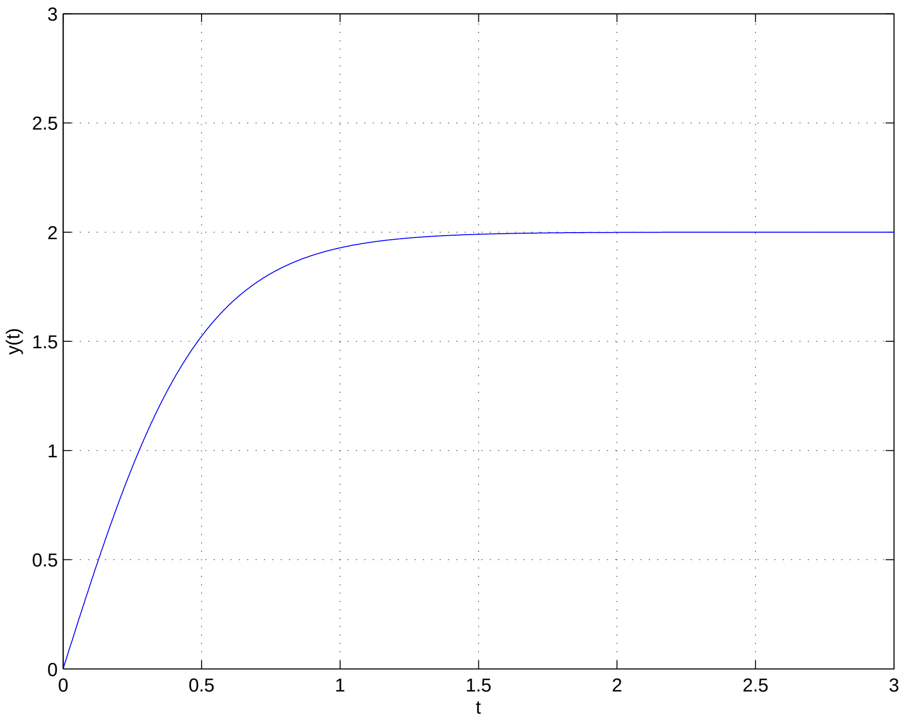

FIGURE 2. La solution exacte de l'exercice 3.