Mécanique 3A MNB — Automne 2014

Examen du 29 Janvier 2015

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
calculatrices scientifiques de base

Exercice 1.
Soient $a = 0$, $b = 1$ et f une fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On choisit les quatre points d'interpolation d'abscisses $\{a, a, b, b\}$.

(1) (a) Déterminer le polynôme d'interpolation p_3 de degré trois de f sur les points d'interpolation d'abscisses $\{a, a, b, b\}$. Ce polynôme sera déterminé en fonction de la variable t et de différences divisées, elle-mêmes exprimées en fonction de $f(a) = f(0)$, $f'(a) = f'(0)$, $f(b) = f(1)$ et $f'(b) = f'(1)$.

(b) Quelles équations sont-elles satisfaites par p_3 ?

(c) (i) Déterminer p_3 dans le cas particulier où

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 1/2, \quad f'(1) = 1. \tag{1}$$

Cette fonction p_3 sera notée, pour toute la suite, x.

(ii) Déterminer p_3 dans le cas particulier où

$$f(0) = -1/2, \quad f'(0) = 1, \quad f(1) = 1/2, \quad f'(1) = 1. \tag{2}$$

Cette fonction p_3 sera notée, pour toute la suite, y.

(iii) Quelles équations sont-elles satisfaites par x et y ?

(2) En éliminant t entre x et y, montrer que, quand t décrit $[0, 1]$, le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ décrit une courbe d'équation

$$x = 1/2\,(y + 1/2)^2, \tag{3}$$

avec y décrivant l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

(3) Quelle est la nature de la courbe d'équation (3) ? Tracez-la dans un repère orthonormé en précisant ses points extrémaux, notés A et B et ses tangentes.

(4) *Question facultative*

(a) Tracer la parabole obtenue sur la figure 1(a) page 5 (page que vous devrez détacher et rendre). Pourquoi la parabole passe par les points A et B et est tangente au droites $(0A)$ et (OB), où O est le centre du carré ?

(b) Pour chacune des deux figures 1(b) et 1(c), essayez de trouver deux autres courbes simples, incluses dans le carré tracé, partant chacune du point A, arrivant en B, tangentes en A à la droite (OA) et en B à la droite (OB), où O est le centre du carré. Construire les courbes obtenues sur les figures correspondantes.

(c) En utilisant chacune des trois courbes obtenues, correspondant aux différentes courbes des figures 1 et qui pourront « déplacées » (c'est-à-dire transformées par une isométrie du plan), essayer maintenant de construire une courbe sur la figure 2 et qui vérifie les règles suivantes :
- Partir du point A_1 ;
- Passer par chacun des points A_2, A_3, ..., A_8 en restant à l'intérieur de chacun des huits carrés de centres respectifs O_1, O_2, ..., O_8 ;
- La portion de courbe relative à chacun des huits carrés de centre O_i (pour $1 \leq i \leq 8$) doit partir de A_i, arriver en A_{i+1} (A_1 pour le dernier carré) et être tangente en A_i à la droite (O_iA_i) et en A_{i+1} (A_1 pour le dernier carré) à la droite (O_iA_{i+1}) ((O_8A_1) pour le dernier carré).
- Arriver au point A_8.

Construire la courbe obtenue sur la figure 2.

(d) Pourquoi la courbe ainsi construite est de classe $\mathcal{C}^1$?

Dans le corrigé, plus de détails vous seront fournis sur la construction de cette courbe et l'utilisation de la parabole, à l'origine d'un brevet d'invention pour des jouets.

Exercice 2.

Soit la fonction polynômiale p définie par

$$p(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 1.$$

(1) Calculer des approximations de l'intégrale de p sur l'intervalle $[A, B]$ où $A = 0$ et $B = 1$ en utilisant respectivement la méthode du point milieux, des trapèzes et de Simpson en prenant $m = 3$ sous-intervalles.

(2) Calculer la valeur exacte de l'intégrale et déduisez-en les différentes erreurs.

(3) Conclure. Pourquoi l'erreur avec la méthode de Simpson est-elle nulle ?

Exercice 3.

On cherche à approcher les éventuelles racines de l'équation :

$$\xi - 1/2\,\cos(\xi) = 0, \tag{4}$$

sur l'intervalle $I = [0, 1/2\,\pi]$.

(1) Montrer qu'il existe une seule racine r de l'équation (4) sur I.

On se propose d'approcher cette racine par la méthode de point fixe de la fonction $g(\xi) = 1/2\,\cos(\xi)$.

(2) Montrer que cette méthode de point fixe converge vers la racine r pour n'importe quel point d'initialisation $\xi^{(0)} \in I$. Quel devrait être l'ordre de convergence de cette méthode ?

(3) Calculer les *deux* premiers itérés générés par cette méthode, en choisissant vous-même un point d'initialisation.

(4) Trouver une constante $C < 1$, telle que pour n'importe quel point d'initialisation $\xi^{(0)} \in I$, on ait

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|\xi^{(k+1)} - r\right| \leq C \left|\xi^{(k)} - r\right|.$$

En déduire le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur d'au plus $\varepsilon = 1.0\,10^{-6}$, dans le cas où on choisirait $\xi^{(0)} = 1/4\,\pi$.

Exercice 4.
On veut approcher numériquement la solution y de l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = 2\,ty(t) - y(t) + t, \qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

On utilise pour cela une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, dite méthode d'Euler modifiée que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= u_n + hf(t_n, u_n), \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2}(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \hat{u}_n)). \end{aligned}$$

où $t_n = t_0 + nh$, $u_0 = y(t_0)$ et u_n est une approximation de $y(t_n)$.

(1) Calculer au moyen de cette méthode une approximation de $y(0.40)$, solution de (5) à $t = 0.40$ en fixant le pas à $h = 0.20$.

(2) On a appliqué cette méthode d'Euler modifiée et la méthode d'Euler progressif pour différentes valeurs du pas de temps h. Le tableau suivant montre les erreurs (|solution exacte - solution calculée|) commises par les deux méthodes à l'instant $t = 1.00$, vu qu'on connaît ici la solution exacte :

h	méthode 1	méthode 2
0.125	$8.2288\,10^{-4}$	$2.4215\,10^{-1}$
0.250	$2.9821\,10^{-3}$	$4.5557\,10^{-1}$

Identifier quelle colonne a été calculée en utilisant la méthode d'Euler modifiée. Justifier votre réponse.

Exercice 5.
Résoudre le système linéaire suivant par une méthode de décomposition LU :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

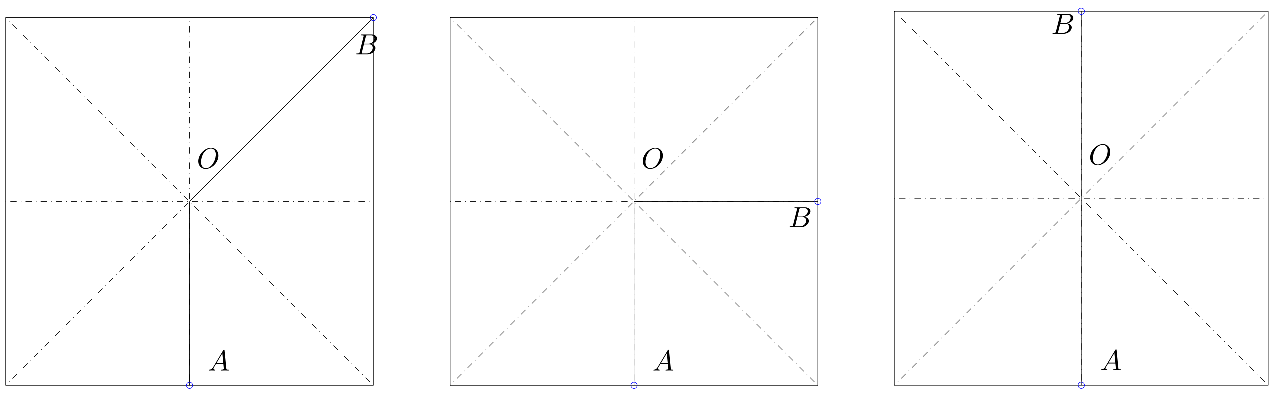
Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

[page blanche]

Page à détacher et à rendre (le cas échéant !)

Nom :
Prénom :



(a) (b) (c)

FIGURE 1. Les trois figures à compléter

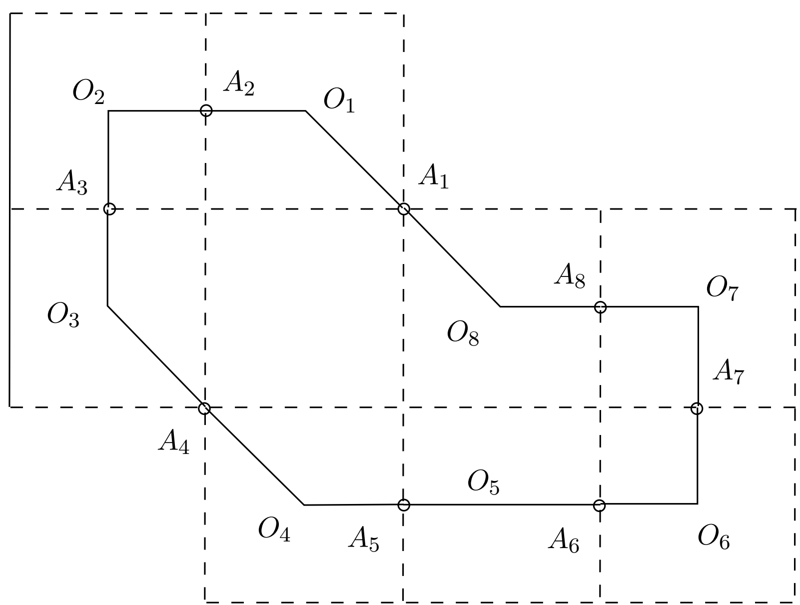


FIGURE 2. La figure à compléter