Mécanique 3A MNB | Automne 2015

Examen du 25 Janvier 2016

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

calculatrices scientifiques de base

Exercice 1. On se propose, dans cet exercice, de montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{1}$$

est convergente et d'en calculer une valeur approchée par la méthode de Simpson à ε près ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé).

(1) Peut-on calculer directement I par la méthode de Simpson ? Pourquoi ?

(2) Soit A appartenant à $[1, +\infty[$. On veut évaluer

$$I_A = \int_0^{A} e^{-x^2} dx$$

à $\varepsilon/2$ près.

(a) Soit la fonction g donnée par

$$g(x) = e^{-x^2} p(x), \tag{2}$$

où p est un polynôme quelconque.

Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété suivante : il existe un polynôme p_n tel que la dérivée n-ième de g vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = e^{-x^2} p_n(x), \tag{3}$$

où les polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$p_0 = p, \tag{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2x p_n(x). \tag{5}$$

(b) En déduire la dérivée quatrième $f^{(4)}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

(c) Déterminer un majorant M de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[0, A]$.

(d) En déduire, en fonction de A, M et de ε, le pas maximal $h_{\max}$ autorisé en méthode de Simpson pour que l'erreur d'intégration commise soit de valeur absolue inférieure à $\varepsilon/2$.

(3) Convergence de I et choix de A.

Soit X un réel vérifiant $X \geq A$ et A un élément de $[1, +\infty[$.

(a) On pose
$$R(X) = \int_A^X e^{-x^2} dx.$$
Montrer que $R(X)$ est défini et que
$$R(X) \leq \int_A^X e^{-x} dx. \tag{6}$$

(b) Calculer
$$b(X) = \int_A^X e^{-x} dx \text{ et } l = \lim_{X \to +\infty} b(X) \text{ en fonction de } A.$$

(c) Montrer que
$$\forall X \geq A, \quad R(X) \leq e^{-A}. \tag{7}$$

(d) En déduire que I est convergente et que
$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq e^{-A}. \tag{8}$$

(e) Déterminer en fonction de ε une valeur de A telle que
$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

(4) Bilan

On donne $\varepsilon = 10^{-4}$.

(a) Déterminer A issu de la question 3e.

(b) Déterminer le pas maximal h_{max} issu des questions 2c et 2d.

(c) Conclure sur le nombre de sous-intervalles à considérer pour évaluer I à 10^{-4} près.

Exercice 2.

On souhaite résoudre l'équation non-linéaire suivante :
$$\tanh(x - \pi) = \frac{\pi}{4} \tag{10}$$
dont la solution exacte est $r = 4.20089882441$.

(1) Montrer que r est l'unique racine de l'équation (10).

(2) En utilisant la formule de Newton-Raphson, calculer les 3 premières itérations du shéma avec pour condition initiale $x_0 = 4.0$, ainsi que l'erreur à chaque itération.

(3) Estimer l'ordre du schéma. Cela correspond-il à la valeur théorique ?

(4) Cette méthode peut mener à des cas pathologiques, notamment en fonction de la condition initiale. Identifier ce problème en vous appuyant sur un exemple, pour le cas présent.

Rappel : $\dfrac{d}{dx}\tanh(x) = 1 - \tanh^2(x)$

Exercice 3.
On considère l'équation de l'oscillateur harmonique amortie suivante

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \omega^2 y(t) = 0 \tag{11}$$

à laquelle on ajoute les conditions initiales :

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{12}$$

dont on souhaite approcher la solution numériquement.

(1) Effectuer le changement de variable $y(t) \to (u(t), v(t))$ permettant de transformer l'équation (11) en un système d'équation du premier ordre.

(2) Ce système d'équation peut alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice A.

(3) On souhaite intégrer numériquement cette équation par la méthode d'Euler progressive.

(a) Écrire la méthode en notant n l'indice du pas de temps courant et δt le pas de temps, considéré constant ici.

(b) Ce schéma est-il soumis à une condition de stabilité ? Si oui, la calculer.

(c) Calculer les 3 premières itérations de ce shéma avec $\delta t = 0.01$, $\alpha = 1.0$ et $\omega_0 = 5.0$.

(4) On souhaite maintenant résoudre cette équation par une méthode d'Euler rétrograde.

(a) Écrire la méthode puis la mettre sous la forme matricielle suivante :

$$C \begin{pmatrix} u^{n+1}(t) \\ v^{n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{n}(t) \\ v^{n}(t) \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer la matrice C. Ce shéma est-il soumis à une condition de stabilité ? Si oui, la calculer.

(c) Proposer une méthode de résolution du système linéaire et argumenter ce choix.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`