Mécanique 3A MNB | Automne 2016

Examen du 24 Janvier 2017

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
calculatrices scientifiques de base

Exercice 1.

i	x_i	$P(X \leq x_i)$
0	1.000000000	0.841344746
1	1.100000000	0.864333939
2	1.200000000	0.884930330

TABLE 1. Les valeurs de x_i et de $P(X \leq x_i)$ pour $i \in \{0, ..., 2\}$

Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la probabilité que X soit inférieure ou égale à x, notée $P(X \leq x)$ est donnée par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On a calculé cette probabilité pour différentes valeurs de x, au moyen de méthodes d'intégration numérique très précises et les résultats sont reportés dans le tableau 1. On cherche à déterminer par interpolation polynômiale et en utilisant les valeurs données dans ce tableau, la valeur approchée de $P(X \leq 1.0500)$.

(1) Quelle fonction devez-vous interpoler ?

(2) Quelle est sa dérivée ?

(3)

Obtenir $P(X \leq 1.0500)$ avec une erreur absolue inférieure à $\varepsilon = 6.0\,10^{-6}$.

Dans le tableau 2 ont été affichés les maximums des dérivées $f^{(i)}$ pour $i \in \{2, 3\}$, sur différents intervalles.

	$[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$
$\lvert f^{(2)} \rvert$	0.241971	0.239637
$\lvert f^{(3)} \rvert$	0.045749	0.085442

TABLE 2. Les maximas des valeurs absolue des dérivées $\left|f^{(j)}\right|$ sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

Exercice 2.
Calculer des approximations de

$$\int_1^2 x \sin(x)\, dx,$$

en utilisant respectivement la méthode du point milieu, des trapèzes et de Simpson en prenant $m = 3$ sous-intervalles.

Exercice 3.
On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 4e^{x/4} - 6$ dans l'intervalle $[0, 4]$. [Il est évident pour cette fonction qu'il existe un seul zéro α dans $[0, 4]$, et que vous pouvez même le donner exactement. Le but est de valider vos connaissances sur les méthodes numériques associées.]

(1) Méthode de bissection :

 (a) Calculer les deux premiers itérés.

 (b) Estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le zéro α avec une tolérance $tol = 10^{-6}$.

(2) Méthode de point fixe : On considère la méthode de point fixe suivante :

$$g(x) = x - \frac{e^{x/4}}{16} + \frac{3}{32}.$$

 (a) Établir que cette méthodes est convergente, et déterminer l'ordre de convergence.

 (b) Proposer un point d'initialisation $x^{(0)}$ et calculer les deux premiers itérés.

 (c) Estimer enfin le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-6}, pour un $x^{(0)}$ choisi tel que $|x^{(0)} - \alpha| < 2$.

Exercice 4.
La déformation verticale $y(t)$ d'un ressort est décrite par l'équation différentielle suivante

$$y''(t) = -\frac{a}{4k^2}\left[\left(1-k^2\right) y(t) + 2k^2 y(t)^3\right]$$

où les paramètres $a = 4$ et $k = 5$ sont des caractéristiques du ressort. Les conditions initiales sont données par $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0.04$.

(1) Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre 1. Indiquer les conditions initiales applicables au système.

(2) Utiliser la méthode du point milieu pour calculer une approximation de $y(0.1)$ en prenant un pas $h = 0.1$.

(3) Soit E la valeur de l'erreur de l'approximation de $y(0.1)$ calculée précédemment. Quelle serait approximativement l'erreur si on avait pris un pas $h = 0.01$ pour calculer une approximation de $y(0.1)$?(Ne pas calculer cette approximation).

Exercice 5.
Résoudre le système linéaire suivant par une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage global (total) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`