

Mécanique 3A MNB

Automne 2017

Examen du 23 Janvier 2018

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐*Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso***Calculatrice autorisée :** OUI ☒ NON ☐*calculatrices scientifiques de base*

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 4.

Exercice 1.

On considère l'équation non linéaire

$$f(x) = \ln(x) - 2x + \frac{5}{2} = 0$$

sur l'intervalle $I = [1; 2]$.

- (1) Montrer qu'il existe un zéro r pour la fonction $f(x)$ dans I et qu'il est unique.

On se propose d'approcher ce zéro par la méthode de Newton.

- (2) Écrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. Quel est l'ordre de convergence de cette méthode? Justifier votre réponse.
- (3) Calculer les deux premiers itérés, x_1 et x_2 , générés par cette méthode, en choisissant le point d'initialisation $x_0 = 3/2$.
- (4) Montrer qu'il existe une constante C , que vous définirez, telle que, pour $x_0 \in [1; 2]$, point d'initialisation choisi, on ait

$$|x_{k+1} - r| \leq C |x_k - r|^2$$

Sachant qu'on peut montrer que $C < 1/4$, en déduire une estimation de l'erreur qui est commise en arrêtant les itérations à x_2 , dans le cas où on choisirait $x_0 = 3/2$.

Exercice 2.

Soit le système linéaire suivant :

$$Ax = b$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer la factorisation LU de la matrice A . (La factorisation LU est celle définie en cours avec une matrice U ayant des 1 sur la diagonale).
- (2) En déduire la solution du système $Ax = b$ en utilisant les algorithmes de remontée et de descente.

Exercice 3.

On considère le problème aux valeurs initiales suivant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

La solution exacte de ce problème s'écrit : $y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- (1) Appliquer le schéma d'Euler progressif pour calculer une approximation de $y(0.2)$ en prenant un pas de discrétisation $h = 0.1$, puis $h = 0.2$. Donner l'erreur relative commise dans chacun des cas.
- (2) Appliquer le schéma de Runge Kutta d'ordre 4 pour calculer une approximation de $y(0.2)$ en prenant un pas de discrétisation $h = 0.2$. Donner l'erreur relative commise.

Exercice 4.

On connaît les valeurs y_0, y_1 et y_2 d'une fonction g aux points $x_0 = 6000, x_1 = 6001$ et $x_2 = 6002$:

$$y_0 = 1/3, \quad y_1 = -2/3, \quad y_2 = 0.$$

- (1) (a) Déterminer p_2 le polynôme d'interpolation de g .
 (b) Déterminer les coefficients de p_2 en utilisant, si possible, 7 chiffres significatifs.
 (c) Évaluer alors numériquement, en utilisant 7 chiffres significatifs, les valeurs de p_2 aux points x_0, x_1 et x_2 . Commenter ces valeurs par rapports aux valeurs des y_i .
- (2) (a) Déterminer les différences divisées relatives aux polynômes p_2 , que l'on pourra évaluer en utilisant 7 chiffres significatifs.
 (b) Montrer que le polynôme p_2 est donné par

$$p_2(x) = g[x_0] + (x - x_0)(g[x_0, x_1] + (x - x_1)g[x_0, x_1, x_2]). \quad (1)$$

- (c) Avec la forme donnée par (1) *sans la réécrire sur la base canonique*, déterminer alors numériquement avec 7 chiffres significatifs et en utilisant les valeurs numériques des différences divisées déterminées dans la question 2a, les valeurs de p_2 aux points x_0, x_1 et x_2 . Commenter ces valeurs par rapports aux valeurs des y_i et comparer avec les valeurs numériques obtenues dans la question 1.

Exercice 5.

Soit f , une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On considère la formule de quadrature

$$Q(f) = W_0 f(0) + W_1 f(1/2) + W_2 f(1), \quad (2)$$

pour approcher numériquement l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

- (1) (a) Trouver les poids W_0, W_1, W_2 tels que la formule intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 2. On exprimera ces coefficients sous forme rationnelle.
- (b) On propose dans cette question de procéder autrement pour éviter le calcul de l'inverse d'une matrice.
 - (i) Calculer $\Pi_2(f)$, le polynôme d'interpolation de f aux nœuds 0, 1/2, 1 en fonction de $f(0), f(1/2), f(1)$.
 - (ii) Calculer

$$\mathcal{I}(\Pi_2(f)) = \int_0^1 \Pi_2(f)(x)dx, \tag{3}$$

en fonction de $f(0), f(1/2), f(1)$.

- (iii) En justifiant et en utilisant l'égalité de $Q(\Pi_2(f))$ et de $\mathcal{I}(\Pi_2(f))$, en déduire de nouveau l'expression des poids W_0, W_1, W_2 .
- (2) Calculer le degré d'exactitude de cette formule.
- (3) (a) Utiliser la formule de quadrature trouvée pour donner une approximation numérique de l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

- (b) Quelle est l'erreur alors commise?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/index.html>

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$