

Examen du 16 Janvier 2019

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON *Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso***Calculatrice autorisée :** OUI NON *calculatrices scientifiques de base***Exercice 1.**On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$:

$$g(x_0) = -1, \quad g(x_1) = 2, \quad g(x_2) = -4.$$

- (1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 , x_1 et x_2 .
- (2) Pour $\alpha = 1$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Exercice 2.Une fonction f est connue seulement pour certaines valeurs de x données dans le tableau suivant :

x	0	0.25	0.5	0.75	1.
$f(x)$	0.3989	0.3867	0.3521	0.3011	0.2420

- (1) Évaluer $\int_0^1 f(x)dx$, par une méthode de trapèzes composite basée sur l'ensemble des valeurs données.
- (2) Évaluer $\int_0^1 f(x)dx$, par une méthode de simpson composite basée sur l'ensemble des valeurs données.

Exercice 3.On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{2x+3}. \quad (1)$$

et on pose

$$a = 2, \quad b = 4. \quad (2)$$

- (1) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a, b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a, b]$ vers $r = 3$.

- (2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 1.10^{-3}$.
- (3) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 4$.

Exercice 4.

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante

$$ml\ddot{\theta}(t) + \lambda\dot{\theta}(t) + mg\theta(t) = 0,$$

$$\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0,$$

avec : $m = 1$, $l = 2$, $g = 10$ et $\lambda = 2$.

- (1) Écrire le système d'équations différentielles ordinaires du 1er ordre équivalent à l'équation ci-dessus.
- (2) On fixe le pas $h = 0.1$. Calculer une approximation de la solution $\theta(t = 0.2)$ par la méthode d'Euler progressif.
- (3) Peut-on choisir n'importe quelle valeur de h ? Justifier votre réponse.
- (4) On a appliqué cette méthode d'Euler progressif et une autre méthode pour différentes valeurs du pas de temps h . Le tableau suivant montre les erreurs absolues commises par les deux méthodes à l'instant $t = 2$:

h	méthode 1	méthode 2
0.1	1.86×10^{-3}	5.95×10^{-4}
0.05	9.17×10^{-4}	1.44×10^{-4}

Identifier quelle colonne a été calculée en utilisant la méthode d'Euler progressif. Justifier votre réponse.

Exercice 5.

Résoudre le système linéaire suivant par une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage global (total) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>