Mécanique 3A MNB Automne 2020

Examen du 04 Janvier 2021

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
calculatrices scientifiques de base

Cet exercice a été donné à l'examen d'Automne 2020.

Exercice 1.
En course à pied sur route, on utilise des modèles d'interpolation pour estimer, à partir de performances (temps) qu'un coureur a déjà réalisées sur certaines distances, les performances qu'il pourrait réaliser sur d'autres distances. On cherche ainsi à approcher la fonction $t(x)$ qui indique le temps en secondes que le coureur mettrait pour parcourir x mètres. On considère ici un coureur dont les performances sont indiquées dans le tableau suivant :

x (en mètres)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (en secondes)	0	13	245	1980

(1) Utiliser un polynôme d'interpolation de degré 2 pour estimer la performance que devrait réaliser ce coureur sur une distance de 5000 m.

(2) Donner une approximation de l'erreur commise dans cette estimation en calculant l'écart absolu avec l'estimation par un polynome d'interpolation de degré 3.

Exercice 2.
Soit une fonction f connue seulement pour les valeurs de x suivantes :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0	6	24	60

On désire évaluer $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$ par une formule de quadrature.

(1) Donner une estimation de la valeur de I par la méthode de trapèzes composite sur 1 intervalle puis 2 intervalles puis 4 intervalles.

(2) Estimer la valeur de I par la méthode de Romberg (issue de l'accélération de Richardson). Vous donnerez le tableau correspondant et préciserez l'ordre des approximations trouvées.

Exercice 3.
Soit $K \in \mathbb{R}$. Dans cet exercice, on étudie l'équation

$$e^x = -x + K. \tag{1}$$

(1) Montrer que l'équation (1) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée r.

(2) On définit la fonction g par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = K - e^x, \tag{2}$$

On met désormais l'équation (1) sous la forme

$$g(x) = x, \tag{3}$$

et on considère la méthode du point fixe associée sur un intervalle $[a, b]$ (définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$).

(a) On pose, dans cette question :

$$a = -2, \tag{4a}$$
$$b = -1/2, \tag{4b}$$
$$K = -1. \tag{4c}$$

(i) Montrer qu'avec ces valeurs la méthode du point fixe converge pour tout $x_0 \in [a, b]$.

(ii) Déterminer la valeur de n telle que $|x_n - r| \leq \varepsilon$ avec

$$\varepsilon = 10^{-2}. \tag{5}$$

(iii) Pour cette valeurs de n, calculer les valeurs de $(x_p)_{0 \leq p \leq n}$ avec $x_0 = -5/4$.

(b) On pose, dans cette question :

$$a = 1/4, \tag{6a}$$
$$b = 1, \tag{6b}$$
$$K = 5/2. \tag{6c}$$

(i) Est-ce que la méthode du point fixe converge ?

(ii) Quelle méthode pourriez-vous utiliser pour résoudre (1) dans ce cas ?

Exercice 4.
On veut approcher numériquement la solution $y(t)$ de l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = 2ty - y + t, \quad y(0) = 1, \tag{7}$$

On utilise pour cela une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, dite méthode d'Euler modifiée que nous rappelons ici :

- $\hat{u}_n = u_n + hf(t_n, u_n)$
- $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \hat{u}_n))$

où $t_n = t_0 + nh$, $u_0 = y(t_0)$ et u_n est une approximation de $y(t_n)$.

(1) Calculer au moyen de cette méthode une approximation de $y(0.4)$, solution de (7) à $t = 0.4$, en fixant le pas à $h = 0.2$.

(2) On a appliqué cette méthode d'Euler modifiée et la méthode d'Euler progressive pour différentes valeurs du pas de temps h. Le tableau suivant montre les erreurs (|solution exacte - solution calculée|) commises par les deux méthodes à l'instant $t = 1$, vu qu'on connaît ici la solution exacte :

h	méthode 1	méthode 2
0.125	8.2×10^{-4}	0.242150
0.25	0.002982	0.455578

Identifier quelle colonne a été calculée en utilisant la méthode d'Euler modifiée. Justifier votre réponse.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`