POLYTECH LYON

Nom Prénom :

# Examen 2021-2022 :

## Méthodes Numériques de Base

**Durée : 1h30**
**Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso est autorisé.**
**Les calculatrices scientifiques de base sont autorisées.**

### EXERCICE 1

On considère la table suivante donnant les valeurs $\nu$ de la viscosité cinématique $(m^2.s^{-1})$ de l'eau en fonction de la température $T$ $(°C)$

| $T$ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu$ | 1.14 | 1.11 | 1.08 | 1.06 | 1.03 | 1.01 | 0.983 | 0.960 | 0.938 | 0.917 | 0.894 |

**Q1)** Par interpolation linéaire, à quelle température la viscosité vaut-elle $\nu = 1\ m^2.s^{-1}$ ?

**Q2)** Par interpolation quadratique, quelle est la viscosité à $24.5°C$ ?

### EXERCICE 2

On cherche à calculer $8^{1/3}$ en recherchant la racine de la fonction $f(x) = x^3 - 8$. En utilisant successivement les méthodes de la bissection (intervalle initial :$[a_0, b_0]$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 3$), de Newton (valeur initiale : $x_0 = 3$) et de la sécante (valeurs initiales : $x_0 = 0$ et $x_1 = 3$), effectuez les premières itérations en remplissant le tableau ci-dessous (les calculs effectués seront détaillés dans la copie) :

| Itération | Méthode de la bissection | | Méthode de Newton | Méthode de la sécante |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $x_i$ | $x_i$ |
| 0 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| 1 | | | | 3 |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

### EXERCICE 3

On veut résoudre numériquement l'équation différentielle $y'(t) = 1 + t - y(t)$ avec la condition initiale $y(t = 0) = y_0 = 1$ en utilisant différentes méthodes.

**Q1)** Compléter le tableau suivant avec la solution approchée de $t = 0$ s à $t = 1.2$ s pour les méthodes d'Euler progressif et Euler modifiée avec un pas de temps de $h = 0.6$ s (les calculs effectués seront détaillés dans la copie).

| Itération $n$ | Temps $t$ | Euler progressif | Euler modifiée | Valeur exacte |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | 1 |
| 1 | | | | 1.148811 |
| 2 | | | | 1.501194 |

**Q2)** Comparez les erreurs de ces deux méthodes. Quel est l'ordre de précision de chacune d'elles ?

La méthode d'Euler progressif est basée sur la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 1 :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \mathcal{O}(h^2)$$

La méthode de Taylor consiste à pousser ce développement limité jusqu'à l'ordre 2, voire plus.

**Q3)** Faites ce développement limité jusqu'à l'ordre 2, en remplaçant les dérivées successives de $y(t)$ par celles de la fonction $f(t, y) = y'(t)$, et mettez le sous la forme

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + ha + \frac{1}{2}h^2 b + \mathcal{O}(h^3)$$

avec $a$ et $b$ à déterminer. Donnez l'expression de ce développement limité pour l'équation différentielle $y'(t) = 1 + t - y(t)$, en fonction de $t_n$ et de $y(t_n)$. Pour obtenir la méthode complète, on remplacera dans l'expression obtenue $y(t_n)$ par son approximation $y_n$.

**Q4)** Effectuez les deux premières itérations avec cette méthode, en prenant comme pas de temps $h = 0.6$ s et complétez le tableau suivant (les calculs effectués seront détaillés dans la copie).

| Itération $n$ | Temps $t$ | Méthode de Taylor |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 1 | | |
| 2 | | |

**Q5)** Comparez ces résultats avec ceux obtenus précédemment.

**EXERCICE 4**

Vous allez calculer de deux manières différentes une approximation de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

**Q1)** Donner une approximation de $I$ par la méthode de simpson composite avec 2 sous-intervalles.

**Q2)** On considère maintenant la formule suivante (appelée quadrature de Radau) :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \frac{1}{2}f(-1) + \frac{3}{2}f(\frac{1}{3})$$

Appliquer cette formule pour donner une autre approximation de $I$. On pourra pour cela changer de variable dans $I$ pour retrouver la forme de la quadrature de Radau.

**EXERCICE 5**

Soit le système linéaire suivant : $Ax = b$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Résoudre ce système en utilisant la méthode d'élimination de Gauss avec pivotage partiel.