

Examen de TD du 13 Décembre 2016

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits***Calculatrice autorisée :** OUI NON *Tout type**On pourra utiliser les résultats rappelés page 2.***Exercice 1.**

- (1) On considère les points $M_i = (x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 4}$ définis par leurs abscisses $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ et leurs ordonnées $\{1, 0, 3, 16, 45\}$. Déterminez les différences divisées permettant de calculer le polynôme dont le graphe passe par les points M_i .
- (2) En déduire qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, 4\}, \quad P(x_i) = y_i.$$

- (3) Déterminez ce polynôme sous sa forme de Newton. On admettra qu'il vaut

$$P(x) = x^3 + 2x^2. \tag{1}$$

Exercice 2.

- (1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[a, b] = [-2, 2]$ par

$$\forall x, \quad f(x) = \arctan(x) + 1.$$

- (a) Déterminez une approximation de

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

grâce à la méthode composite des trapèze en utilisant un nombre d'intervalles dans $\{1, 2, 3, 4\}$.

- (b) Calculez la valeur exacte de I et expliquez ce que vous constatez.

- (2) Déterminez une approximation de I en utilisant la méthode de Simpson composite en utilisant un nombre d'intervalles dans $\{1, 2\}$.

(3) (a) Déterminez la valeur exacte de

$$J = \int_{-1}^2 P(x)dx,$$

où P est définie par (1), et une approximation par la méthode de Simpson élémentaire

(b) Expliquez ce que vous constatez.

Exercice 3.

Mettre au point la méthode de dichotomie (théorie, gestion de l'erreur, calcul numérique) pour déterminer un zéro de P , défini par (1).

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>