

Examen de TD du 15 octobre 2019

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI NON

Tout type

Exercice 1.

On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$:

$$g(x_0) = 0.680231, \quad g(x_1) = -0.553299, \quad g(x_2) = 0.947093.$$

- (1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 , x_1 et x_2 .
- (2) Pour $\alpha = 1$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Exercice 2.

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 2.

Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sin(1/5 x^2), \quad (1a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^1 f(x) dx. \quad (1b)$$

- (1) (a) Déterminer I^T , l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.
- (b) Déterminer f' et f'' , puis donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.
- (c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = 1/2 \operatorname{FresnelS} \left(1/5 \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \right) \sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{5}, \quad (2a)$$

soit encore

$$I = 0.0664764327312. \quad (2b)$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

- (2) (a) Déterminer I_3^T , l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_3^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 1.10^{-8}. \quad (3)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$