Mécanique 3A MNB Automne

Examen de TD du 10 Novembre 2021

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

(1) On considère les points $M_i = (x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 4}$ définis par leurs abscisses $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ et leurs ordonnées $\{1, 0, 3, 16, 45\}$. Déterminez les différences divisées permettant de calculer le polynôme dont le graphe passe par les points M_i.

(2) En déduire qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que

$$\forall i \in \{0, ..., 4\}, \quad P(x_i) = y_i.$$

(3) Déterminez ce polynôme sous sa forme de Newton. On admettra qu'il vaut

$$P(x) = x^3 + 2\,x^2. \tag{1}$$

Exercice 2.

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 2.
Soit f donnée par

$$\forall x \in [2, 3]\,, \quad f(x) = x + \ln(x)\,, \tag{2a}$$

et l'intégrale I

$$I = \int_2^3 f(x) dx. \tag{2b}$$

(1) (a) Déterminer I^S, l'approximation de I par la méthode élémentaire de Simpson.

(b) Déterminer les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$, puis donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire de Simpson et fournissez-en une majoration.

(c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = -2\,\ln(2) + 3/2 + 3\,\ln(3)\,, \tag{3a}$$

soit encore

$$I = 3.4095425048844. \tag{3b}$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $\left|I^S - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(2) (a) Déterminer I_2^S, l'approximation de I par la méthode composite de Simpson avec $N = 2$ sous-intervalles.

(b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite de Simpson puis fournissez-en une majoration.

(c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $\left|I_2^S - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite de Simpson avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-13}. \tag{4}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$