

**Examen de TD du 26 octobre 2022**

Durée : 1 heure(s)

**Documents autorisés :** OUI  NON *Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso***Calculatrice autorisée :** OUI  NON *Tout type***Exercice 1.**On connaît les valeurs d'une fonction  $g$  aux points  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 3$  :

$$g(x_0) = 1, \quad g(x_1) = 2, \quad g(x_2) = 3.$$

- (1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté  $\Pi_2 g$ ), interpolant la fonction  $g$  aux nœuds  $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$ .
- (2) Pour  $\alpha = 3/2$ , donner une valeur approchée de  $g(\alpha)$ .

**Exercice 2.**

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 2.

Soit  $f$  donnée par

$$\forall x \in [0, 1/2\pi], \quad f(x) = x^2 \cos(x), \quad (1a)$$

et l'intégrale  $I$ 

$$I = \int_0^{1/2\pi} f(x) dx. \quad (1b)$$

- (1) (a) Déterminer  $I^S$ , l'approximation de  $I$  par la méthode élémentaire de Simpson.
- (b) On note

$$M_p = \max_{x \in [0, 1/2\pi]} |f^{(p)}(x)|, \quad (2)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée  $p$ -ième de  $f$  sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  et  $M_4$  :

$$M_1 = 2.4674011002723 ; \quad (3a)$$

$$M_2 = 6.2831853071796 ; \quad (3b)$$

$$M_3 = 7.4637493504705 ; \quad (3c)$$

$$M_4 = 12.5663706143592. \quad (3d)$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire de Simpson et fournissez-en une majoration.

- (c) (i) Calculer la valeur exacte de  $I$ .
- (ii) En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire  $|I^S - I|$  et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (2) (a) Déterminer  $I_3^S$ , l'approximation de  $I$  par la méthode composite de Simpson avec  $N = 3$  sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite de Simpson puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire  $|I_3^S - I|$  et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre  $N$  de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de  $I$  par la méthode composite de Simpson avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-13}. \quad (4)$$

## Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

### *Erreurs des méthodes d'intégration*

Méthodes élémentaires sur  $[a, b]$ . Dans le tableau qui suit,  $\eta$  appartient à  $]a, b[$ .

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur  $[A, B]$  avec un pas  $h = (B - A)/N$ . Dans le tableau qui suit,  $\eta$  appartient à  $[A, B]$ .

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$