

Examen de TD du 14 Janvier 2014

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Calculatrice autorisée : OUI NON

Exercice 1.

On se donne $n = 5$ points d'abscisses respectives $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\}$ et d'ordonnées respectives $\{y_0 = 1, y_1 = 4, y_2 = 9, y_3 = 16, y_4 = 25\}$.

- (1) Déterminer le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 2}$.
- (2) Que se passe-t-il si on rajoute le point (x_3, y_3) ?
- (3) Que se passe-t-il si on rajoute le point (x_4, y_4) (en plus du point déjà rajouté) ?
- (4) Expliquer ceci, avec un minimum de calcul !
- (5) *Question facultative*
 - (a) Au vu des résultats précédents, montrer, *sans calculs*, que $f[x_0, x_3, x_2, x_4]$ est nul.
 - (b) Plus généralement, montrer sans calcul, que si I est un sous ensemble de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ de cardinal q supérieur ou égal à 4, alors, en notant $I = \{i_1, \dots, i_q\}$, la différence divisée $f[x_{i_1}, \dots, x_{i_q}]$ est nulle.

Exercice 2.

On pourra utiliser les résultats rappelés page 2.

- (1) Rappeler la formule d'intégration (élémentaire) du point milieu sur l'intervalle $[a, b]$.
- (2) Cette formule est-elle est une formule de quadrature ?
- (3) Quel est son degré (d'exactitude) ?
- (4) Calculer ce degré.
- (5) Vu le nombre de point utilisé, ce degré est-il logique ?

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$

méthode	erreur	nombre de points
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$	1
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$	1
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$	2
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$	3

Dans tous les cas, η appartient à $]a, b[$.Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Dans tous les cas, η appartient à $[A, B]$.**Corrigé**Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>