

Examen de TD du 15 octobre 2019

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON *Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso***Calculatrice autorisée :** OUI NON *Tout type***Exercice 1.**On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$:

$$g(x_0) = 0.115634, \quad g(x_1) = -0.360934, \quad g(x_2) = -0.356781.$$

- (1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 , x_1 et x_2 .
- (2) Pour $\alpha = 0.500000$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Exercice 2.

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 2.

Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 2], \quad f(x) = \cos(1/10 x^2), \quad (1a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^2 f(x) dx. \quad (1b)$$

- (1) (a) Déterminer I^S , l'approximation de I par la méthode élémentaire de Simpson.
- (b) On note

$$M_p = \max_{x \in [0, 2]} |f^{(p)}(x)|, \quad (2)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée p -ième de f sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de M_1 , M_2 , M_3 et M_4 :

$$M_1 = 0.1557673369235 ; \quad (3a)$$

$$M_2 = 0.2252534275022 ; \quad (3b)$$

$$M_3 = 0.1961318646529 ; \quad (3c)$$

$$M_4 = 0.1200000000000. \quad (3d)$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire de Simpson et fournissez-en une majoration.

(c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = \text{FresnelC} \left(2/5 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \right) \sqrt{\pi} \sqrt{5}, \quad (4a)$$

soit encore

$$I = 1.9682361637328. \quad (4b)$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^S - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

- (2) (a) Déterminer I_2^S , l'approximation de I par la méthode composite de Simpson avec $N = 2$ sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite de Simpson puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_2^S - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite de Simpson avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 1.10^{-13}. \quad (5)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$