

Examen de TD du 18 Novembre 2020

Durée : 0.75 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI NON
Tout type

Vous composez tous à distance, alors merci de jouer le jeu et de respecter les documents interdits et éventuellement autorisés. En fin d'examen, merci de m'envoyer à l'adresse suivante : jerome.bastien@univ-lyon1.fr en pièces jointes non zipées, soit des photos nettes de vos pages manuscrites et numérotées, soit le cas échéant, un pdf produit à partir d'OpenOffice, de L^AT_EX ou autre. Nommez si possible vos fichiers "NOM prénom", éventuellement numérotés !

Tapez s'il-vous-plait dans l'objet du mail :
Examen de TD du 18 Novembre 2020 Mécanique 3A MNB NOM prénom

Exercice 1.

On considère le polynôme défini par

$$p(x) = -23 + 50x - 28x^2 + 5x^3. \quad (1)$$

On définit les points $(x_i)_{0 \leq i \leq 2}$ par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3. \quad (2)$$

- (1) Calculer les valeurs de p aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq 2}$
- (2) Définir le polynôme d'interpolation $\Pi_2(p)$ aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq 2}$.

Exercice 2.

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 2.

Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 3 \cos(x), \quad (3a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^1 f(x) dx. \quad (3b)$$

- (1) (a) Déterminer I^T , l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.
 (b) Déterminer f' et f'' , puis donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.
 (c) (i) Calculer la valeur exacte de I .
 (ii) En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (2) (a) Déterminer I_3^T , l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.
 (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.
 (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_3^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \quad (4)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$