

Examen de TD du 10 Novembre 2021

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI NON
Tout type

Exercice 1.

- (1) On considère les points $M_i = (x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 4}$ définis par leurs abscisses $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ et leurs ordonnées $\{1, 2, -3, -20, -55\}$. Déterminez les différences divisées permettant de calculer le polynôme dont le graphe passe par les points M_i .
- (2) En déduire qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, 4\}, \quad P(x_i) = y_i.$$

- (3) Déterminez ce polynôme sous sa forme de Newton. On admettra que sa forme canonique est :

$$P(x) = -x^3 + 2x + 1. \quad (1)$$

Exercice 2.

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 2.

Soit f donnée par

$$\forall x \in [3, 4], \quad f(x) = x^2 + \ln(x), \quad (2a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_3^4 f(x) dx. \quad (2b)$$

- (1) (a) Déterminer I^T , l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.
(b) Déterminer f' et f'' , puis donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.
(c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = \frac{34}{3} - 3 \ln(3) + 8 \ln(2), \quad (3a)$$

soit encore

$$I = 13.5826739118086. \quad (3b)$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

- (2) (a) Déterminer I_3^T , l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_3^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \quad (4)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$