Mécanique 3A MNB Automne 2018

Examen de TD du 9 Octobre 2018

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

(1) On connaît les valeurs d'une fonction f^0 aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$:

$$f^0(x_0) = 1, \quad f^0(x_1) = 0, \quad f^0(x_2) = 0.$$

En utilisant la forme de Newton, construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 f^0$), interpolant la fonction f^0 aux nœuds x_0, x_1 et x_2.

(2) *On admet* que les deux polynômes $\Pi_2 f^1$ et $\Pi_2 f^2$ interpolant respectivement les fonctions f^1 et f^2 valant respectivement $\{0, 1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\}$ aux points x_i sont donnés par

$$\Pi_2 f^1(x) = -(x-1)(x-3)\,,$$
$$\Pi_2 f^2(x) = 1/2\ (x-1)(x-2)\,.$$

Que remarquez-vous sur les fonctions $\Pi_2 f^0$, $\Pi_2 f^1$ et $\Pi_2 f^2$? Pouviez-vous démontrer dès le début qu'elles étaient égales aux polynômes de Lagrange l_0, l_1 et l_2 relatifs aux points x_0, x_1 et x_2 ?

(3) Calculer $\Pi_2 f^0(3/2)$.

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 3.

Exercice 2. On se propose, dans cet exercice, de montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{1}$$

est convergente et d'en calculer une valeur approchée par la méthode de Simpson à ε près ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé).

(1) Peut-on calculer directement I par la méthode de Simpson ? Pourquoi ?

(2) Soit A appartenant à $[1, +\infty[$. On veut évaluer

$$I_A = \int_0^A e^{-x^2} dx$$

à $\varepsilon/2$ près.

(a) Soit la fonction g donnée par

$$g(x) = e^{-x^2} p(x), \tag{2}$$

où p est un polynôme quelconque.

Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété suivante : il existe un polynôme p_n tel que la dérivée n-ième de g vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = e^{-x^2} p_n(x), \tag{3}$$

où les polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$p_0 = p, \tag{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2x p_n(x). \tag{5}$$

(b) En déduire la dérivée quatrième $f^{(4)}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

(c) Déterminer un majorant M de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[0, A]$.

(d) En déduire, en fonction de A, M et de ε, le pas maximal $h_{\max}$ autorisé en méthode de Simpson pour que l'erreur d'intégration commise soit de valeur absolue inférieure à $\varepsilon/2$.

(3) Convergence de I et choix de A.

Soit X un réel vérifiant $X \geq A$ et A un élément de $[1, +\infty[$.

(a) On pose

$$R(X) = \int_A^X e^{-x^2} dx.$$

Montrer que $R(X)$ est défini et que

$$R(X) \leq \int_A^X e^{-x} dx. \tag{6}$$

(b) Calculer

$$b(X) = \int_A^X e^{-x} dx \text{ et } l = \lim_{X\to+\infty} b(X) \text{ en fonction de } A.$$

(c) Montrer que

$$\forall X \geq A, \quad R(X) \leq e^{-A}. \tag{7}$$

(d) En déduire que I est convergente et que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq e^{-A}. \tag{8}$$

(e) Déterminer en fonction de ε une valeur de A telle que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

(4) Bilan

On donne $\varepsilon = 10^{-4}$.

(a) Déterminer A issu de la question 3e.

(b) Déterminer le pas maximal h_{max} issu des questions 2c et 2d.

(c) Conclure sur le nombre de sous-intervalles à considérer pour évaluer I à 10^{-4} près.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$