

Examen de TD du 14 Janvier 2015

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Photocopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI NON

Tout type

On pourra utiliser les résultats rappelés page 2.

Exercice 1.

- (1) Soient deux réels a, b tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. Déterminer p_1 le polynôme d'interpolation de f de degré 1 aux points a et b , puis p_2 , le polynôme de f de degré 2 aux points $a, c = (a + b)/2$ et b .
- (2) Intégrer p_1 sur $[a, b]$. Montrer que l'on retrouve la formule d'intégration numérique du trapèze.
- (3) Écrire la formule d'intégration composite du trapèze sur l'intervalle $[A, B]$ où $A = 1$ et $B = 2$ avec N sous-intervalle.
- (4) Approcher $\int_A^B F(t)dt$ où $A = 1, B = 2$ et $F(t) = \cos(t)$ par cette formule en prenant $N = 6$. Comparer cette valeur à l'intégrale exacte.
- (5) Quelle valeur de N assure que l'erreur commise est inférieure à $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-2}$?

Exercice 2.

- (1) On considère de nouveau deux réels a, b tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. Déterminer p_2 le polynôme d'interpolation de f de degré 2 aux points a, a et b . Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser les calculs déjà fait lors de l'exercice 1 et admettre que $f[a, b, a] = f[a, a, b]$.
- (2) Quelles égalités vérifie p_2 ?
- (3) Intégrer p_2 sur $[a, b]$. Montrer que l'on retrouve une formule d'intégration numérique modifiée par rapport à celle de du trapèze.
- (4) Comme dans l'exercice 1, écrire la formule d'intégration composite sur l'intervalle $[A, B]$ où $A = 1$ et $B = 2$ avec N sous-intervalle. et approcher $\int_A^B F(t)dt$ où $A = 1, B = 2$ et $F(t) = \cos(t)$ par cette formule en prenant $N = 6$. Comparer cette valeur à l'intégrale exacte.

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$

méthode	erreur	nombre de points
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$	1
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$	1
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$	2
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$	3

Dans tous les cas, η appartient à $]a, b[$.Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Dans tous les cas, η appartient à $[A, B]$.**Corrigé**Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>