

**Examen de TD du 14 Janvier 2015**

Durée : 1 heure(s)

**Documents autorisés :** OUI  NON

*Photocopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits*

**Calculatrice autorisée :** OUI  NON

*Tout type*

*On pourra utiliser les résultats rappelés page 2.*

**Exercice 1.**

- (1) Soient deux réels  $a, b$  tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . Déterminer  $p_1$  le polynôme d'interpolation de  $f$  de degré 1 aux points  $a$  et  $b$ , puis  $p_2$ , le polynôme de  $f$  de degré 2 aux points  $a$ ,  $c = (a + b)/2$  et  $b$ .
- (2) Intégrer  $p_2$  sur  $[a, b]$ . Montrer que l'on retrouve la formule d'intégration numérique de Simpson.
- (3) Écrire la formule d'intégration composite de Simpson sur l'intervalle  $[A, B]$  où  $A = 0$  et  $B = 1$  avec  $N$  sous-intervalle.
- (4) Approcher  $\int_A^B F(t)dt$  où  $A = 0$ ,  $B = 1$  et  $F(t) = \sin(t)$  par cette formule en prenant  $N = 3$ . Comparer cette valeur à l'intégrale exacte.
- (5) Quelle valeur de  $N$  assure que l'erreur commise est inférieure à  $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-8}$  ?

**Exercice 2.**

- (1) On considère de nouveau deux réels  $a, b$  tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . Déterminer  $p_3$  le polynôme d'interpolation de  $f$  de degré 3 aux points  $a$ ,  $a$ ,  $c = (a + b)/2$  et  $b$ . Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser les calculs déjà fait lors de l'exercice 1 et admettre que  $f[a, c, b, a] = f[a, a, c, b]$ .
- (2) Quelles égalités vérifie  $p_3$  ?
- (3) Intégrer  $p_3$  sur  $[a, b]$ . Montrer que l'on retrouve une formule d'intégration numérique modifiée par rapport à celle de de Simpson.
- (4) Comme dans l'exercice 1, écrire la formule d'intégration composite sur l'intervalle  $[A, B]$  où  $A = 0$  et  $B = 1$  avec  $N$  sous-intervalle. et approcher  $\int_A^B F(t)dt$  où  $A = 0$ ,  $B = 1$  et  $F(t) = \sin(t)$  par cette formule en prenant  $N = 3$ . Comparer cette valeur à l'intégrale exacte.

## Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur  $[a, b]$ 

méthode	erreur	nombre de points
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$	1
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$	1
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$	2
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$	3

Dans tous les cas,  $\eta$  appartient à  $]a, b[$ .Méthodes composites (composées) sur  $[A, B]$  avec un pas  $h = (B - A)/N$ .

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Dans tous les cas,  $\eta$  appartient à  $[A, B]$ .**Corrigé**Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>