Mécanique 3A MNB Automne 2013

Corrigé de l'examen du 29 Janvier 2014

Correction de l'exercice 1.

On pourra consulter le script `examMNBA13_exo1.m` qui permet de calculer les différents éléments demandés. Dans cet exercice, les données de l'exercice 1.5 de TD ont été utilisées.

(1) (a)

t	$f(t)$
1.00000	4.47550
1.50000	5.39960
2.00000	6.54960
2.50000	7.82160
3.00000	9.19970

On utilise les trois premières valeurs de t données dans le tableau ci-dessus. On utilise la forme de Newton :

$$\Pi_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1). \tag{1}$$

On considère donc les 3 point suivants qui contiennent la donnée $\tau = 1.2$: $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.5$ et $x_2 = 2.0$. On calcule les différences divisées :

$$\begin{aligned} f[x_0] &= 4.475500, \\ f[x_0,x_1] &= 1.848200, \\ f[x_0,x_1,x_2] &= 0.451800. \end{aligned}$$

On en déduit donc, d'après (1),

$$\Pi_2(\tau) = \Pi_2(1.2) = 4.818032. \tag{2}$$

(b) On rajoute le quatrième point $x_3 = 2.5$. La nouvelle différence divisée vaut donc

$$f[x_0,x_1,x_2,x_4] = -0.138533.$$

On en déduit donc

$$\Pi_3(x) = (f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \tag{3}$$

soit

$$\Pi_3(x) = \Pi_2(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \tag{4}$$

et

$$\Pi_3(\tau) = \Pi_3(1.2) = 4.811382,$$

ce qui n'est guère différent de la valeur donnée par (2).

Voir la figure 1 page suivante.

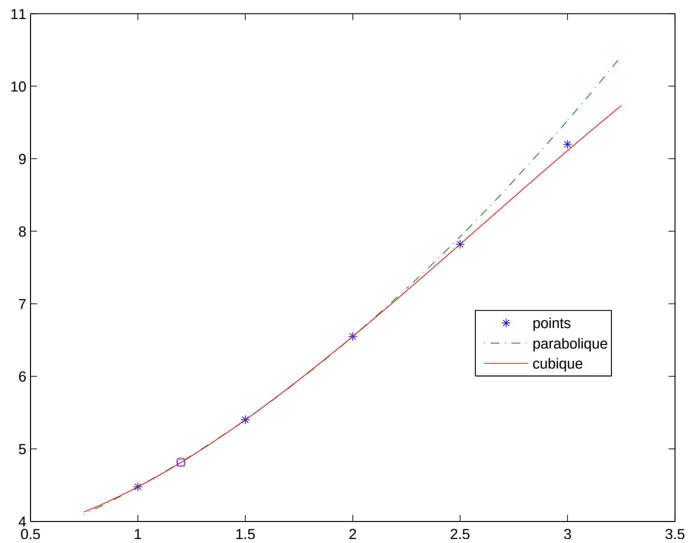


FIGURE 1. Les points $(t, f(t))$ et les deux polynômes de degré 2 et 3.

(2) (a) Ici, on dispose des valeurs de f pour $N = 5$ points équirépartis dans l'intervalle $[A, B] = [1, 3]$ avec un pas égal à $h = 0.5$.

$$I_N^T = \frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i). \tag{5}$$

On trouve numériquement

$$I_N^T = 13.304200, \tag{6}$$

Remarque 1. On dispose des valeurs de f pour $N = 5$ points équirépartis dans l'intervalle $[A, B] = [1, 3]$ avec un pas égal à $h = 0.5$. L'intégrale approchée de f sur $[A, B]$ par la méthode composites des rectangles (non vues en cours et non exigée ici) est donnée par :

$$I_N^R = h \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i). \tag{7}$$

Il suffit donc d'appliquer cette formule en utilisant les donnés du tableau de la question 1a. On trouve numériquement

$$I_N^R = 12.123150, \tag{8}$$

ce qui est très proche du résultat donné par (6).

(b) (i) Si on veut utiliser la méthode du milieu ou de Simpson, on a deux méthodes :

(A) On peut remarquer que le nombre de points $N = 5$ où f est connue est impair. On peut donc utiliser la méthode composite du point milieu

$$I_N^M = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right). \tag{9}$$

ou celle de Simpson

$$I_N^S = \frac{h}{6}\left(f(A) + f(B) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right) \tag{10}$$

où le pas h est cette fois-ci égal à $h = 1.0$ et les points t_i correspondent aux valeurs de rang impaires des réels t donnés dans le tableau de la question 1a, tandis que les points milieux $t_i + h/2$ correspondent aux valeurs de rang paires des réels t donnés dans ce même tableau.

(B) On peut aussi considérer le pas $h = 0.5$ et utiliser la formule (9) ou (10) où les points t_i sont donnés dans le tableau de la question 1a, tandis que les points milieux correspondent à des réels où f n'est pas connue et il nous faut donc les valeurs de ces réels par la splines.

(ii) Pour cette question, l'énoncé incitait fortement à utiliser la méthode 2(b)iB ! En effet, dans l'énoncé était fourni le tableau suivant qui contient les valeurs de f évaluées aux différents milieux grâce à la spline utilisée :

t	$f(t)$
1.25000	4.90144
1.75000	5.95423
2.25000	7.17272
2.75000	8.49701

Il suffit donc d'appliquer cette formule en utilisant les données du tableau de la question 1a. On trouve numériquement en utilisant (9) pour le point milieu

$$I_N^M = 13.262700, \tag{11a}$$

et pour Simpson en utilisant (10)

$$I_N^S = 13.276533, \tag{11b}$$

Si on avait utilisé la méthode 2(b)iA, on aurait trouvé pour le point milieu

$$I_N^M = 13.221200, \tag{12a}$$

et pour Simpson

$$I_N^S = 13.276533. \tag{12b}$$

On constate que la valeur donnée par (12a) est proche de la valeur donnée par (11a), tandis que celles données par (11b) et (12b) semblent identiques !

(c) La méthode composite de Simpson appliquée à la spline sur [A,B] consiste à sommer les différentes intégrales approchées données par la méthode élémentaire de Simpson sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, elle-mêmes étant de degré (d'exactitude) 3, c'est-à-dire, intégrant exactement les polynômes de degré 3. Or la spline construite est bien de degré au plus 3 (par morceaux, c'est-à-dire sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$) et donc intégrée exactement par la méthode composite de Simpson.

Remarque 2. On est obligé d'utiliser la méthode d'intégration élémentaire de Simpson pour justifier cela. On pourra être tenter d'utiliser le raisonnement suivant : l'erreur de la méthode composite de Simpson est donnée par $-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$ où η appartient à $[A, B]$ et cette quantité est nulle si f est polynômiale par morceaux de degré au plus 3. En effet, la spline construite a une dérivée première et seconde continue et n'est donc pas de classe C^4, comme l'exige le raisonnement ainsi fait.

Remarque 3. Numériquement, on est capable de déterminer les coefficients de la spline sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$. Pour plus de détails, consulter le fichier fourni `examcorMNBA13.m`. On obtient la valeur suivante de l'intégrale exacte de la spline :

$$I = 13.276533, \tag{13}$$

ce qui est bien la valeur donnée par (11b). Si on fait la différence entre les deux méthodes, on obtient bien une erreur égale à 0.

Remarque 4. On pouvait aussi répondre plus rapidement aux trois questions relatives aux calcul par la méthode des rectangles, des milieux des trapèzes et de Simpson, en remarquant la chose suivante : on pose

$$S = h \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i),$$
$$S' = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right),$$

quantités que l'on calcule une fois pour toute grâce aux deux tableaux fournis dans l'énoncé. On a alors

$$\begin{aligned} I_N^R &= hf(t_0) + S, \\ I_N^M &= S', \\ I_N^T &= \frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + S, \\ I_N^S &= \frac{1}{6}\left(h\big(f(A) + f(B)\big) + 2S + 4S'\right). \end{aligned}$$

Numériquement on retrouve bien les valeurs déjà calculées :

$$\begin{aligned} I_N^R &= 12.123150, \\ I_N^M &= 13.262700, \\ I_N^T &= 13.304200, \\ I_N^S &= 13.276533. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.

On pourra consulter le script `examMNBA13_exo2.m` qui permet de calculer les différents éléments demandés. Voir aussi le corrigé de l'exercice 3.3, très proche !

(1)
$$f(x) = x^2 - a$$

(2)
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

(3)
Les résultats sont donnés dans le tableau 1 page suivante.

(4) La méthode de Newton se ramène à une méthode de point fixe en posant :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

donc

$$g'(x) = 2(x^2 - a)$$

n	x_n	$\lvert x_n - \sqrt{a}\rvert$
0	5.0000000000	1.8377223398
1	3.5000000000	0.3377223398
2	3.1785714286	0.0162937684
3	3.1623194222	0.0000417620

TABLE 1. Itérés x_n de Newton

$$g'(r) = g'(\sqrt{a}) = 0$$
$$g''(x) = 4x$$
$$g''(r) = 4\sqrt{a} \neq 0$$

L'erreur de la méthode de point fixe s'écrit :

$$e_{n+1} \simeq g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!}e_n^3 + \dots$$

Donc ici :

$$e_{n+1} \simeq \frac{g''(r)}{2}e_n^2 \simeq 2\sqrt{a}e_n^2$$

Méthode d'ordre 2.

(5) Parmi les méthode vues en cours, la seule qui est d'ordre 2 est la méthode de Newton. Les autres ont des ordres de convergence inférieurs à 2.

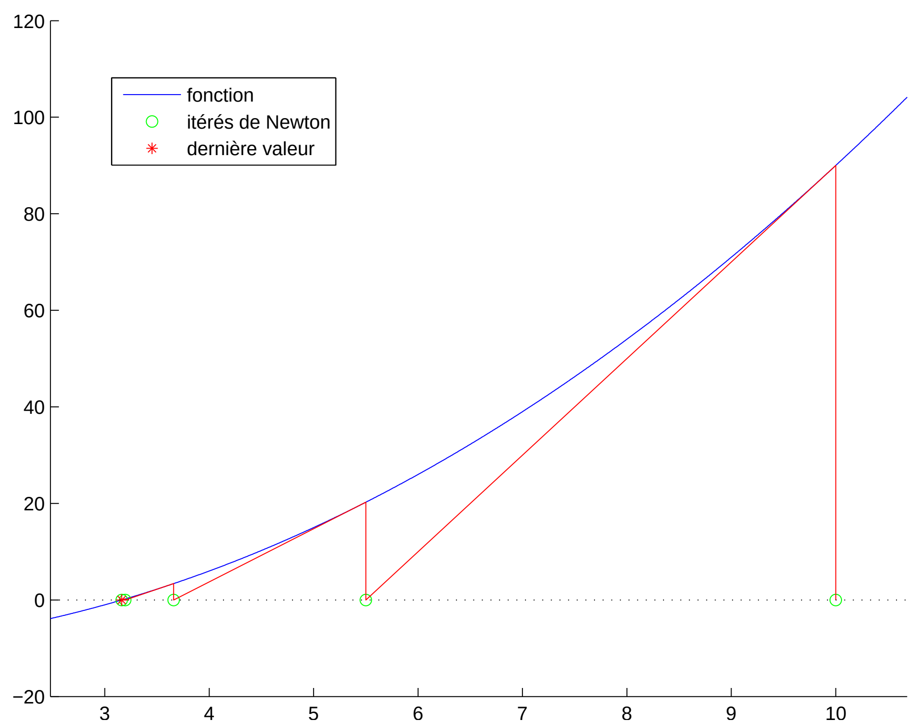


FIGURE 2. Les divers itérés par la méthode de Newton.

Par ailleurs la valeur initiale peut être choisie arbitrairement car la méthode convergera quel que soit $x_0 > 0$ (voir figure 2), cela est du au fait que la courbe représentative de $f(x)$ est une parabole qui coupe l'axe des $x > 0$ en une seule valeur positive et $f'(x) > 0$ quel que soit $x > 0$. On peut donc par exemple choisir $x_0 = a$. Une méthode de point fixe par exemple ne convergera pas forcément quel que soit $x_0 > 0$, il faut choisir correctement la fonction d'itération.

Il est donc préférable de choisir la méthode de Newton.

Correction de l'exercice 3.

On pourra consulter le script `examMNBA13_exo3.m` qui permet de calculer les différents éléments demandés.

(1) Système équivalent :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= -2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 4 \end{cases}$$

n	t_n	y_1^n	y_2^n
0	0.00	0.00	4.00
1	0.25	1.00	4.00
2	0.50	2.00	2.00
3	0.75	2.50	0.00
4	1.00	2.50	0.00
5	1.25	2.50	0.00
6	1.50	2.50	0.00
7	1.75	2.50	0.00
8	2.00	2.50	0.00
9	2.25	2.50	0.00
10	2.50	2.50	0.00
11	2.75	2.50	0.00
12	3.00	2.50	0.00

Table 2. Valeurs approchées par Euler progressif

Les résultats sont donnés dans le tableau 2. On constate qu'à partir de $n = 3$, la solution ne bouge plus. Donc la valeur asymptotique est 2.50.

Remarque 5. La solution de l'équation différentielle

$$y''(t) = -2y(t)y'(t), \tag{14a}$$

$$y(0) = y_0, \tag{14b}$$

$$y'(0) = y_0', \tag{14c}$$

peut s'obtenir sous matlab symbolique (voir le script `examMNBA13_exo3.m`). On obtient

$$y(t) = \tanh(t(y_0' + y_0^2)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{atanh}(y_0/(y_0' + y_0^2)^{\frac{1}{2}}))(y_0' + y_0^2)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

Dans le cas particulier de

$$y_0 = 0, \tag{16a}$$

$$y_0' = 4, \tag{16b}$$

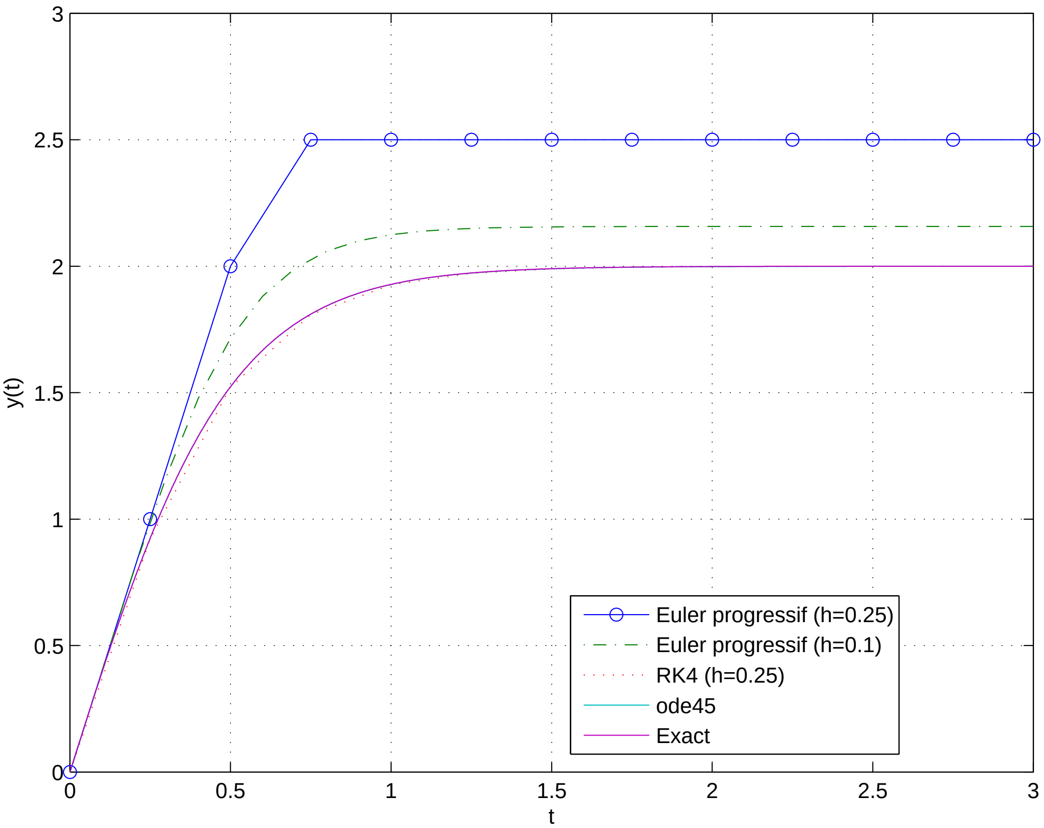
on a alors
$$y(t) = 2\tanh(2t) \tag{17}$$
On obtient en particulier
$$\lim_{t\to+\infty} = 2, \tag{18}$$
ce qui confirme le graphe de l'énoncé (voir figure 3 page suivante).

Pour obtenir cela à la main, on peut remarquer que $2yy' = (y^2)'$ et donc que (14) est équivalente à :
$$y'(t) = -y^2 + C, \tag{19a}$$
$$y(0) = y_0, \tag{19b}$$
où
$$C = y_0' + y_0^2 \tag{20}$$
On en déduit d'une part que si y a une limite à l'infini avec une dérivée nulle, alors (19a) implique $y^2(+\infty) = C$, ce qui confirme (18). Cela implique aussi que $C \geq 0$, ce qui est vrai numériquement. On résoud alors (19a) par séparation des variables :
$$\frac{dy}{-y^2+C} = dt,$$
En posant $y = \sqrt{C}z$, on a alors
$$\frac{dz}{-z^2+1} = \sqrt{C}dt,$$
ce que l'on résoud sur un intervalle où z est différent ± 1 en écrivant
$$\int \frac{dz}{-z^2+1} = \sqrt{C}t + K. \tag{21}$$
La primitive de gauche est alors évaluée en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples :
$$\frac{1}{-z^2+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right),$$
et donc en intégrant sur un intervalle où z est différent de ± 1, on a
$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \sqrt{C}t + k$$
En supposant $|z| < 1$, il vient donc
$$\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = e^{\sqrt{C}t+K},$$
ce qui donne en $t = 0$
$$K = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + y_0/\sqrt{C}}{1 - y_0/\sqrt{C}}, \tag{22}$$
ainsi que, en retournant à y et en prenant la fonction réciproque,
$$y = \sqrt{C}\frac{e^{2\sqrt{C}t+2K} - 1}{e^{2\sqrt{C}t+2K} + 1}, \tag{23}$$
identique à ce qui est donné par (15). Dans le cas particulier (16), on a
$$C = 4, \quad K = 0,$$
et donc
$$y = 2\frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1},$$

soit encore

$$y = 2\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}, \tag{24}$$

ce qui est bien équivalent à (17).



(2)

FIGURE 3. La solution exacte et quelques solutions aprochées.

On pourrait améliorer le résultat en diminuant h ou en choisissant une méthode d'ordre supérieur, Runge Kutta d'ordre 2 ou 4 par exemple. Voir figure 3.

Correction de l'exercice 4.
Voir aussi l'exercice de TD 5.2. On obtient

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 2,$$
$$x_3 = 3.$$